



قررت وزارة التعليم تدريس
هذا الكتاب وطبعه على نفقتها



وزارة التعليم
Ministry of Education

المملكة العربية السعودية

الرياضيات

الصف الثالث المتوسط

الفصل الدراسي الثالث



قام بالتأليف والمراجعة

فريق من المتخصصين

يُوزع مجاناً للإتباع



وزارة التعليم
Ministry of Education
2024 - 1446

طبعة ١٤٤٦ - ٢٠٢٤

٢ وزارة التعليم ، ١٤٤٤هـ

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر

وزارة التعليم

الرياضيات - الصف الثالث المتوسط - التعليم العام - الفصل الدراسي الثالث.

/ وزارة التعليم - الرياض ، ١٤٤٤هـ .

١٢٥ ص ؛ ٢١ × ٢٧ سم

ردمك : ٧-٣٠٠-٥١١-٦٠٣-٩٧٨

١ - الرياضيات - تعليم ٢ - التعليم المتوسط - السعودية - كتب دراسية.

أ.العنوان

١٤٤٤ / ١٦٢٦

ديوي ٥١٠,٧

رقم الإيداع : ١٤٤٤ / ١٦٢٦

ردمك : ٧-٣٠٠-٥١١-٦٠٣-٩٧٨

حقوق الطبع والنشر محفوظة لوزارة التعليم

www.moe.gov.sa

مواد إثرائية وداعمة على "منصة عين الإثرائية"



ien.edu.sa

أعزاءنا المعلمين والمعلمات، والطلاب والطالبات، وأولياء الأمور، وكل مهتم بالتربية والتعليم؛

يسعدنا تواصلكم؛ لتطوير الكتاب المدرسي، ومقترحاتكم محل اهتمامنا.



fb.ien.edu.sa



وزارة التعليم

Ministry of Education

2024 - 1446

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



المقدمة

الحمد لله والصلاة والسلام على نبينا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين، وبعد:

تعد مادة الرياضيات من المواد الدراسية الأساسية التي تهيئ للطالب فرص اكتساب مستويات عليا من الكفايات التعليمية، مما يتيح له تنمية قدرته على التفكير وحل المشكلات، ويساعده على التعامل مع مواقف الحياة وتلبية متطلباتها.

ومن منطلق الاهتمام الذي توليه حكومة خادم الحرمين الشريفين بتنمية الموارد البشرية؛ وعياً بأهمية دورها في تحقيق التنمية الشاملة، كان توجه وزارة التعليم نحو تطوير المناهج الدراسية وفي مقدمتها مناهج الرياضيات، بدءاً من المرحلة الابتدائية؛ سعياً للارتقاء بمخرجات التعليم لدى الطلاب، والوصول بهم إلى مصاف أقرانهم في الدول المتقدمة.

وتتميز هذه الكتب بأنها تتناول المادة بأساليب حديثة، تتوافر فيها عناصر الجذب والتشويق، التي تجعل الطالب يقبل على تعلمها ويتفاعل معها، من خلال ما تقدمه من تدريبات وأنشطة متنوعة، كما تؤكد هذه الكتب على جوانب مهمة في تعليم الرياضيات وتعلمها، تتمثل فيما يأتي:

- الترابط الوثيق بين محتوى الرياضيات وبين المواقف والمشكلات الحياتية.
 - تنوع طرائق عرض المحتوى بصورة جذابة مشوقة.
 - إبراز دور المتعلم في عمليات التعليم والتعلم.
 - الاهتمام بالمهارات الرياضية، التي تعمل على ترابط المحتوى الرياضي وتجعل منه كلاً متكاملًا، ومن بينها: مهارات التواصل الرياضي، ومهارات الحس الرياضي، ومهارات جمع البيانات وتنظيمها وتفسيرها، ومهارات التفكير العليا.
 - الاهتمام بتنفيذ خطوات حل المشكلات، وتوظيف استراتيجياتها المختلفة في كيفية التفكير في المشكلات الرياضية والحياتية وحلها.
 - الاهتمام بتوظيف التقنية في المواقف الرياضية المختلفة.
 - الاهتمام بتوظيف أساليب متنوعة في تقويم الطلاب بما يتناسب مع الفروق الفردية بينهم.
- ولمواكبة التطورات العالمية في هذا المجال، فإن المناهج المطوّرة والكتب الجديدة سوف توفر للمعلم مجموعة متكاملة من المواد التعليمية المتنوعة التي تراعي الفروق الفردية بين الطلاب، إضافة إلى البرمجيات والمواقع التعليمية، التي توفر للطلاب فرصة توظيف التقنيات الحديثة والتواصل المبني على الممارسة، مما يؤكد دوره في عملية التعليم والتعلم.
- ونحن إذ نقدّم هذه الكتب لأعزائنا الطلاب، لنأمل أن تستحوذ على اهتمامهم، وتلبي متطلباتهم، وتجعل تعلمهم لهذه المادة أكثر متعة وفائدة.

والله ولي التوفيق



الفهرس

الدوال التربيعية

الفصل

٨

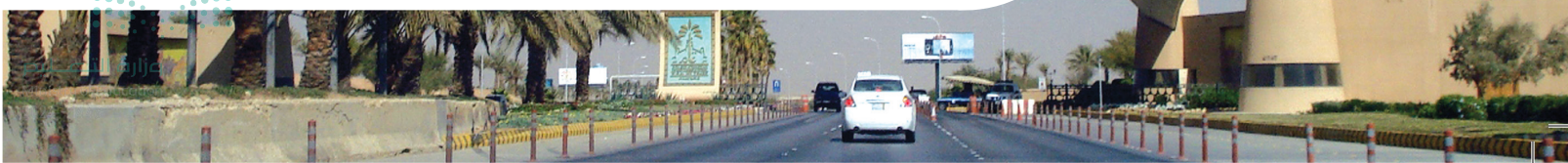
- التهيئة للفصل ٨ ١٠
- ١-٨ تمثيل الدوال التربيعية بيانياً ١٢
- ٢١ معمل الجبر: معدل التغير في الدالة التربيعية ٢١
- ٢-٨ حل المعادلات التربيعية بيانياً ٢٢
- ٢٧ **اختبار منتصف الفصل** ٢٧
- ٣-٨ حل المعادلات التربيعية بإكمال المربع ٢٨
- ٤-٨ حل المعادلات التربيعية باستعمال القانون العام ٣٤
- ٤١ **اختبار الفصل** ٤١
- ٤٢ **الاختبار التراكمي** ٤٢

المعادلات الجذرية والمثلثات

الفصل

٩

- التهيئة للفصل ٩ ٤٤
- ١-٩ تبسيط العبارات الجذرية ٤٦
- ٥٢ معمل الحاسبة البيانية: الأسس النسبية ٥٢
- ٥٣ العمليات على العبارات الجذرية ٥٣
- ٣-٩ المعادلات الجذرية ٥٨
- ٤-٩ نظرية فيثاغورس ٦٢
- ٦٧ **اختبار منتصف الفصل** ٦٧
- ٥-٩ المسافة بين نقطتين ٦٨
- ٦-٩ المثلثات المتشابهة ٧٢
- ٧٨ معمل الجبر: استقصاء النسب المثلثية ٧٨
- ٧٩ النسب المثلثية ٧٩
- ٨٥ **اختبار الفصل** ٨٥
- ٨٦ **الاختبار التراكمي** ٨٦



٨٩	التهيئة للفصل ١٠
٩٠	١-١٠ تصميم دراسة مسحية
٩٥	٢-١٠ تحليل نتائج الدراسة المسحية
١٠٢	٣-١٠ إحصائيات العينة ومعالم المجتمع
١٠٩	اختبار منتصف الفصل
١١٠	٤-١٠ التباديل والتوافيق
١١٧	٥-١٠ احتمالات الحوادث المركبة
١٢٣	اختبار الفصل
١٢٤	الاختبار التراكمي

ستركز في دراستك هذا العام على عدة موضوعات رياضية، تشمل ما يأتي:

- المعادلات الخطية والتربيعية.

- الدوال الخطية والتربيعية.

- كثيرات الحدود والعبارات الجذرية.

- الإحصاء والاحتمال.

وفي أثناء دراستك، ستتعلم طرائق لحل المسائل الرياضية وتمثيلها بصور متعددة وسوف تفهم لغة الرياضيات وتستعمل أدواتها، وتنمي قدراتك الذهنية وتفكيرك الرياضي.



كيف تستعمل كتاب الرياضيات؟

- **اقرأ** فقرة **فيما سبق** لتعرف ارتباط هذا الدرس بما درسته من قبل، ولتعرف أفكار الدرس الجديد اقرأ فقرة **والآن**.
- **ابحث** عن **المفردات** المظللة **باللون الأصفر**، وقرأ تعريف كل منها.
- **راجع** المسائل الواردة في **مثال** والمحلولة بخطوات تفصيلية؛ لتوضيح أفكار الدرس الرئيسة.
- **ارجع** إلى **إرشادات للدراسة** حيث تجد معلومات وتوجيهات تساعدك في متابعة الأمثلة المحلولة.
- **ارجع** إلى فقرة **قراءة الرياضيات**؛ لتتذكر نطق بعض الرموز والمصطلحات الرياضية.
- **تذكر** بعض المفردات التي تعلمتها من قبل، بالرجوع إلى فقرة **مراجعة المفردات**.
- **ارجع** إلى فقرة **تنبيه!** دائماً لتعرف الأخطاء الشائعة التي يقع فيها كثير من الطلاب حول بعض المفاهيم الرياضية فتجنبها.
- **ارجع** إلى المثال المشار إليه مقابل بعض التمارين في فقرتي **تأكد** و **تدرب وحل المسائل** ليساعدك على حل هذه التمارين وما شابهها.
- **استعن** بأسئلة **تدريب على اختبار** لتتعرف بعض أنماط أسئلة الاختبارات.
- **ارجع** إلى **مراجعة تراكمية** لتراجع أفكار الدروس السابقة.
- **استعمل** أسئلة **استعد للدوس اللاحق** لمراجعة بعض المهارات والمفاهيم اللازمة للدرس التالي.
- **نفذ** **اختبار الفصل** في نهاية كل فصل، بعد أن تراجع أفكار الدرس مستفيداً مما دَوَّنته من أفكار في **المخطويات**.
- **نفذ** **الاختبار التراكمي** في نهاية كل فصل لمراجعة الأفكار الرئيسة للفصل وما قبله من فصول.

الفصل ٨

الدوال التربيعية

فيما سبق

درست حل المعادلات التربيعية بالتحليل للعوامل واستعمال خاصية الجذر التربيعي.

والآن

أحل المعادلات التربيعية بيانياً، وبإكمال المربع، وباستعمال القانون العام.

لماذا؟

تكاليف: تقدر التكلفة الكلية "ت" للإنتاج اليومي لمنتج ما في منشأة صناعية بالدالة:

$$ت(س) = ٨٠٠ - ١٠س + \frac{١}{٤}س^٢$$

حيث س عدد الوحدات المنتجة يومياً، ويمكن تمثيل هذه الدالة بيانياً لإيجاد عدد الوحدات المنتجة في اليوم الذي يجعل التكلفة أقل ما يمكن.

المفردات:

- الدالة التربيعية ص (١٢)
- الجذر المكرر ص (٢٢)
- إكمال المربع ص (٢٨)
- القانون العام ص (٣٤)

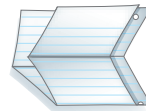
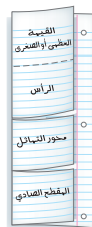


المطويات

منظم أفكار

الدوال التربيعية: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول التمثيل البياني للدوال التربيعية، مبتدئاً بورقة ملاحظات.

- اطو الورقة طولياً بحيث يتكوّن هامش خارجي دليلاً على المطوية.
- اطو الورقة مرتين عرضياً لتكوين أربعة أقسام.
- افتح الطية وقص على خطوط الطي العرضية.
- سم كل قسم كما في الشكل أدناه.





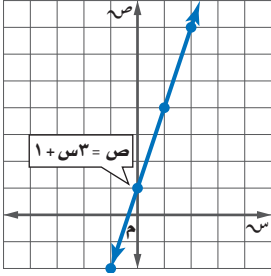
التهيئة للفصل ٨

أجب عن الاختبار الآتي. انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

مراجعة سريعة

مثال ١

استعمل جدول القيم لتمثيل الدالة $ص = ٣س + ١$ بيانيًا.



ص	$ص = ٣س + ١$	س
٢-	$١ + (١-)٣$	١-
١	$١ + (٠)٣$	٠
٤	$١ + (١)٣$	١
٧	$١ + (٢)٣$	٢

اختبار سريع

استعمل جدول القيم لتمثيل كل دالة فيما يأتي بيانيًا: (مهارة سابقة)

(١) $ص = ٣س + ٣$ (٢) $ص = ٢س + ٢$

(٣) $ص = ٢س - ٣$ (٤) $ص = ٥, ٠س - ١$

(٥) $٤س - ٣ص = ١٢$ (٦) $٦ + ٩ص = ٣س$

(٧) $ص - ١س = ١$ (٨) $٦ص = ٣س$

(٩) **توفير:** مع محسن ١٠٠ ريال، ويخطط لتوفير ١٠ ريالات أسبوعيًا، مثل بيانيًا معادلة تبين المبلغ الكلي (م) الذي سيوفره محسن في (س) أسبوعًا.

مثال ٢

حدّد إذا كانت ثلاثية الحدود $٢س - ١٠س + ٢٥$ تشكل مربعًا كاملاً، اكتب "نعم" أو "لا"، وإذا كانت كذلك فحلّلها:

(١) هل الحد الأول مربع كامل؟ نعم

(٢) هل الحد الأخير مربع كامل؟ نعم

(٣) هل الحد الأوسط يساوي $٢(١س)(٥س)$ ؟ نعم

$٢س - ١٠س + ٢٥ = (٥س - ٢)٢$

حدّد إذا كانت كل ثلاثية حدود فيما يأتي تشكل مربعًا كاملاً، اكتب "نعم" أو "لا"، وإذا كانت كذلك فحلّلها:

(مهارة سابقة)

(١٠) $١٢س + ١١٢ + ٣٦$ (١١) $٢س + ٥س + ٢٥$

(١٢) $١٢س - ٢س + ١٢س + ٣٢$ (١٣) $٢س + ٢٠س + ١٠٠$

(١٤) $٤س + ٢٨س + ٤٩$ (١٥) $١٦ك - ٢ك + ٦٤$

(١٦) $١٢١ + ١٢٢ - ٢٢$ (١٧) $٥ت - ١٢ت + ٢٥$

(١٨) $٢س + ٢س + ١$





تمثيل الدوال التربيعية بيانياً

لماذا؟



تُعد نافورة الملك فهد في جدة أعلى نافورة من نوعها في العالم، إذ يصل ارتفاعها إلى ٣١٢ متراً، وتقدم عرضاً رائعاً لحركة المياه والضوء، ويمكن تمثيل حركة المياه بمعادلات تربيعية. كما يمكنك استعمال التمثيلات البيانية لهذه المعادلات لتوضيح مسار المياه.

فيما سبق

درست تمثيل الدوال الخطية بيانياً.

والآن

- أحلل التمثيلات البيانية للدوال التربيعية.
- أمثل الدوال التربيعية بيانياً.

المفردات

- الدالة غير الخطية
- الدالة التربيعية
- الصورة القياسية للدالة التربيعية
- القطع المكافئ
- محور التماثل
- الرأس
- القيمة الصغرى
- القيمة العظمى
- متماثل

أضف إلى مطويتك

مفهوم أساسي

الدالة المولدة (الأم): $(س) = ٢س$

الصورة القياسية: $(س) = أس^٢ + ب س + جـ$

شكل التمثيل: قطع مكافئ

محور التماثل: $س = -\frac{ب}{٢أ}$

المقطع الصادي: جـ

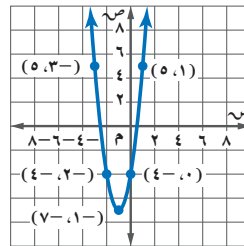
ويكون التمثيل البياني للدالة $ص = أس^٢ + ب س + جـ$ مفتوحاً إلى أعلى، إذا كان $أ > ٠$ ، وتمثل أدنى نقطة فيه نقطة **القيمة الصغرى**، ويكون مفتوحاً إلى أسفل، إذا كان $أ < ٠$ ، وتمثل أعلى نقطة فيه نقطة **القيمة العظمى**، وتمثل نقطتا القيمة العظمى أو القيمة الصغرى رأس القطع.

التمثيل البياني للقطع المكافئ

مثال ١

استعمل جدول القيم لتمثيل الدالة $ص = ٣س^٢ - ٦س - ٤$ بيانياً، وحدد مجالها ومداها.

مثل الأزواج المرتبة بيانياً، ثم صل بينها بمنحنى. يمتد التمثيل البياني للقطع المكافئ إلى ما لا نهاية من كلا طرفيه، ومجال الدالة هو جميع الأعداد الحقيقية، ومداها هو $\{ص | ص \geq -٧\}$ ؛ لأن -٧ هي القيمة الصغرى.



س	ص
١	٥
٠	٤-
١-	٧-
٢-	٤-
٣-	٥

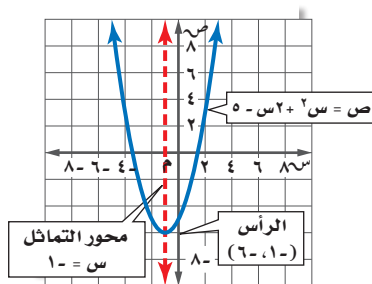
تحقق من فهمك

١) استعمل جدول القيم لتمثيل الدالة $ص = ٣س^٢ + ٦س - ٤$ بيانياً، وحدد مجالها ومداها.

مراجعة المفردات

المجال والمدى

المجال هو مجموعة جميع القيم الممكنة للمتغير المستقل س. وأما المدى فهو مجموعة جميع القيم الممكنة للمتغير التابع ص.



الأشكال **المتماثلة** هي تلك الأشكال التي يكون نصفها متطابقين تمامًا. فالقطع المكافئ هو شكل متماثل وله محور تماثل، وكل نقطة في نصف القطع إلى يسار محور التماثل تقابلها نقطة في النصف الآخر له.

ومن الأسهل عادة تحديد الرأس أولاً عند إيجاد الخصائص من التمثيل البياني، والذي يمثل إما نقطة عظمى أو نقطة صغرى للقطع.

مثال ٢ تحديد خصائص القطع المكافئ من تمثيله البياني

أوجد الرأس، ومعادلة محور التماثل، والمقطع الصادي للتمثيل البياني الآتي:

الخطوة ١: أوجد الرأس.

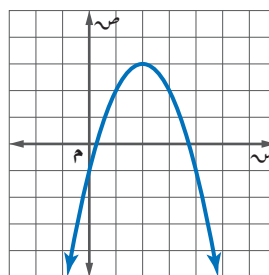
بما أن القطع المكافئ مفتوح إلى أسفل فالرأس يمثل النقطة العظمى له وهي (٢، ٣).

الخطوة ٢: أوجد محور التماثل.

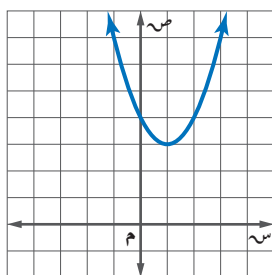
بما أن محور التماثل هو المستقيم الذي يمر بالرأس، ويقسم القطع إلى نصفين متطابقين؛ لذا تكون معادلة محور التماثل هي $س = ٢$.

الخطوة ٣: أوجد المقطع الصادي.

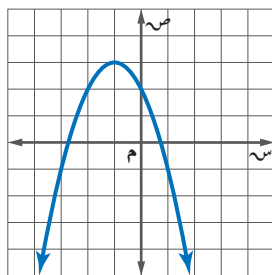
بما أن المقطع الصادي هو النقطة التي يتقاطع فيها القطع المكافئ مع محور الصادات، وهي النقطة (٠، -١)؛ لذا يكون المقطع الصادي هو -١.



تحقق من فهمك



(ب٢)



(١٢)

عند تحديد خصائص القطع المكافئ من قاعدة الدالة يكون من الأسهل غالباً إيجاد معادلة محور التماثل أولاً.

مثال ٣ تحديد خصائص القطع المكافئ من قاعدة دالته

أوجد الرأس، ومعادلة محور التماثل، والمقطع الصادي للدالة: $ص = ٢س + ٢س - ٤س - ٣$

صيغة معادلة محور التماثل

$أ = ٢، ب = ٤، بسط$

$$س = \frac{ب}{٢} = \frac{٤}{٢} = ٢$$

معادلة محور التماثل هي $س = ٢$.

ولإيجاد إحداثي الرأس، خذ القيمة الناتجة من معادلة محور التماثل، واعتبرها إحداثياً سينياً لرأس القطع المكافئ، ثم عوضها في معادلة القطع المكافئ لإيجاد الإحداثي الصادي.

المعادلة الأصلية

$س = ٢، بسط$

$$٥ = ٣ - (١ - ٢) + ٢(١ - ٢) =$$

الرأس هو (١، -٥)، وبما أن المقطع الصادي هو عند النقطة (٠، -٣) دائماً؛ لذا فالمقطع الصادي هو -٣.

إرشادات للدراسة

المقطع الصادي

المقطع الصادي هو الحد الثابت (جـ) للدالة التربيعية في الصورة القياسية

تحقق من فهمك

$$(أ) ص = ٣س - ٢س + ٦س - ٥ \quad (ب) ص = ٢س + ٢س + ٢س + ٢$$

هناك فروق عامة بين الدوال الخطية والدوال التربيعية تظهر في الجدول الآتي:

الصورة القياسية	الدوال الخطية	الدوال التربيعية
الدرجة	١، لاحظ أن جميع المتغيرات من الدرجة الأولى.	٢، لاحظ أن المتغير المستقل s في الحد الأول هو من الدرجة الثانية، ومعامله a لا يمكن أن يساوي صفراً، وإلا أصبحت الدالة خطية.
مثال	$ص = ٢س + ٦$	$ص = ٣س^٢ + ٥س - ٤$
التمثيل البياني	خط مستقيم	قطع مكافئ

كيف تحدد إن كان القطع المكافئ مفتوحاً إلى الأعلى أم إلى أسفل، وإذا كان الرأس يمثل له نقطة صغرى أم نقطة عظمى؟

مفهوم أساسي

القيم العظمى والقيم الصغرى

يكون التمثيل البياني للدالة: $د(س) = أس^٢ + ب س + ج$ ، حيث $ا \neq ٠$:

- مفتوحاً إلى أعلى وله قيمة صغرى عندما $ا < ٠$
- مفتوحاً إلى أسفل وله قيمة عظمى عندما $ا > ٠$
- مدى الدالة التربيعية هو جميع الأعداد الحقيقية التي تزيد على أو تساوي القيمة الصغرى إذا كانت $ا < ٠$ ، أو جميع الأعداد الحقيقية التي تقل عن أو تساوي القيمة العظمى إذا كانت $ا > ٠$.

مثال:

أ موجبة

أ سالبة

أضف إلى مطويتك

مثال ٤ القيم العظمى والقيم الصغرى

لتكن $د(س) = ٢س - ٢س + ٤س + ٦$.

(أ) حدّد إذا كان للدالة قيمة عظمى أم قيمة صغرى.

في الدالة $د(س) = ٢س - ٢س + ٤س + ٦$ ، $ا = ٢$ ، $ب = -٤$ ، $ج = ٦$.

بما أن $ا$ عدد سالب فالتمثيل البياني يكون مفتوحاً إلى أسفل، ويكون للدالة قيمة عظمى.

(ب) أوجد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى للدالة.

القيمة العظمى هي الإحداثي الصادي للرأس.

الإحداثي السيني للرأس $= \frac{-ب}{٢ا} = \frac{-(-٤)}{٢(٢)} = ١$

$د(س) = ٢س - ٢س + ٤س + ٦$

$د(١) = ٢(١) - ٢(١) + ٤(١) + ٦ = ٨$

$د(١) = ٨$

إذن، القيمة العظمى تساوي ٨

تنبيه !

القيم الصغرى والقيم

العظمى

لا تنس إيجاد كلا الإحداثيين السيني والصادي للرأس $(س، ص)$ ، حيث إن القيمة الصغرى أو القيمة العظمى تمثل الإحداثي الصادي له.



(ج) حدد مجال الدالة ومداها.
المجال هو جميع الأعداد الحقيقية، والمدى هو جميع الأعداد الحقيقية التي تقل عن أو تساوي القيمة العظمى، أي $\{ص | ص \geq ٨\}$.

تحقق من فهمك

ليكن د (س) = $٢س^٢ - ٤س - ١$.

١٤ (أ) حدّد فيما إذا كان للدالة قيمة عظمى أم قيمة صغرى.

٤ب (ب) أوجد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى للدالة.

٤ج (ج) حدد مجال الدالة ومداها.

تمثيل الدوال التربيعية بيانياً: تعلّمت كيفية إيجاد العديد من الخصائص المهمة للدوال التربيعية.

أضف إلى

مطويتك

تمثيل الدوال التربيعية بيانياً

مفهوم أساسي

- الخطوة ١: أوجد معادلة محور التماثل.
- الخطوة ٢: أوجد الرأس وحدّد إذا كان يمثل نقطة صغرى أم نقطة عظمى.
- الخطوة ٣: أوجد المقطع الصادي.
- الخطوة ٤: استعمل التماثل لإيجاد نقاط أخرى على التمثيل البياني للدالة عند الضرورة.
- الخطوة ٥: صل بين النقاط بمنحنى.

تمثيل الدوال التربيعية بيانياً

مثال ٥

مثّل الدالة د (س) = $س^٢ + ٤س + ٣$ بيانياً.

الخطوة ١: أوجد معادلة محور التماثل.

صيغة معادلة محور التماثل

$$١ = ب، ٤ = أ$$

بسّط

$$\begin{aligned} \frac{-ب}{٢أ} &= س \\ \frac{-٤}{٢ \times ١} &= س \\ س &= -٢ \end{aligned}$$

الخطوة ٢: أوجد الرأس، وحدّد فيما إذا كان يمثل نقطة صغرى أم عظمى.

المعادلة الأصلية

$$ص = س^٢ + ٤س + ٣$$

$$س = -٢$$

$$٣ + (٢-)٤ + ٢(٢-) =$$

$$١ = -$$

بسّط

يقع الرأس عند النقطة $(٢-، ١-)$ ، وبما أن أ موجبة، فالتمثيل يكون مفتوحاً إلى أعلى؛ لذا يمثل الرأس قيمة صغرى.

الخطوة ٣: أوجد المقطع الصادي.

المعادلة الأصلية

$$ص = س^٢ + ٤س + ٣$$

$$٠ = س$$

$$٣ + (٠)٤ + ٢(٠) =$$

$$٣ =$$

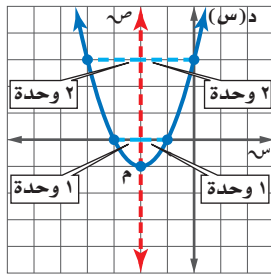
بسّط

المقطع الصادي يساوى ٣.

إرشادات للدراسة

التماثل والنقاط

النقاط الواقعة على الطرفين المتقابلين لمحور التماثل تبعد المسافة نفسها عن المحور يميناً ويساراً، كما تبعد بعداً متساوياً من الرأس.



الخطوة ٤: يقسم محور التماثل القطع المكافئ إلى جزأين متطابقين، لذا فإنه لكل نقطة على أحد الجزأين توجد نقطة تناظرها في الجزء الآخر، وتبعد المسافة نفسها عن المستقيم الذي يمثل محور التماثل، وللنقطتين الإحداثي الصادي نفسه.

الخطوة ٥: صل بين النقاط بمنحنى.

تحقق من فهمك

$$\text{١٥ د (س) = } ٢س^٢ + ٢س - ١ \quad \text{٥٥ د (س) = } ٣س^٢ - ٢س + ٢$$

استعملت معلوماتك حول الدوال التربيعية والقطوع المكافئة والتماثل لإنشاء تمثيلات بيانية، ويمكنك تحليل هذه التمثيلات لحل مسائل من واقع الحياة.

مثال ٦ من واقع الحياة استعمال تمثيل الدوال التربيعية بيانياً

فيزياء: عرضت الجمعية السعودية للعلوم الفيزيائية فيلماً لإطلاق نموذج صاروخ، حيث يمكن تمثيل ارتفاع الصاروخ عن الأرض بالأقدام بعد (س) ثانية بالدالة $f(s) = -١٣س^٢ + ١٣٠س + ٣١٢$.

(أ) مثل الدالة بيانياً.

معادلة محور التماثل

$$١٣٠ = ب، ١٣ - = أ$$

بما أن معادلة محور التماثل $s = ٥$ ؛ لذا فالإحداثي السيني للرأس هو ٥.

المعادلة الأصلية

$$س = ٥$$

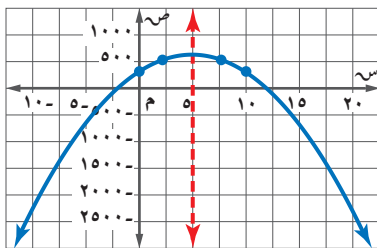
بسط

$$ص = ١٣س^٢ + ١٣٠س + ٣١٢$$

$$= ١٣(٥)^٢ + ١٣٠(٥) + ٣١٢$$

$$= ٦٣٧ = ٣١٢ + ٦٥٠ + ٣٢٥$$

الرأس هو (٥، ٦٣٧).



ولتجد نقطة أخرى، اختر $s = ٠$ وعوّض ذلك في الدالة الأصلية، فتكون النقطة الجديدة هي (٠، ٣١٢)، وتكون النقطة المقابلة لها على الطرف الآخر لمحور التماثل هي (١٠، ٣١٢).

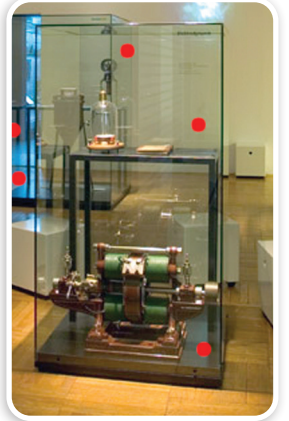
كرّر هذه العملية واختر $s = ٢$ لتحصل على النقطة (٢، ٥٢٠)، وتكون النقطة المقابلة لها (٨، ٥٢٠)، ثم صل بين هذه النقاط بمنحنى.

(ب) ما الارتفاع الذي أطلق منه الصاروخ؟

أطلق الصاروخ عندما كان الزمن صفراً، أو عند المقطع الصادي للدالة، أي من على ارتفاع ٣١٢ قدماً عن الأرض.

(ج) ما أقصى ارتفاع يصله الصاروخ؟

القيمة العظمى للارتفاع تقع عند الرأس؛ لذا يصل الصاروخ إلى أقصى ارتفاع له ٦٣٧ قدماً بعد خمس ثوانٍ من بدء الانطلاق.



الربط مع الحياة

أنشئت الجمعية السعودية للعلوم الفيزيائية في جامعة الملك خالد عام ١٤٢٢ هـ؛ لتهيئة سبل التواصل بين المهتمين بمجالات العلوم الفيزيائية المختلفة، من خلال عقد وتنظيم الندوات والمؤتمرات في مجال العلوم الفيزيائية.

تحقق من فهمك

٦) رمي الرمح: يشارك علي في مسابقة رمي الرمح، ويمكن تمثيل ارتفاع الرمح (ص) بالأقدام بعد (س) ثانية، بالمعادلة $ص = -١٦س^٢ + ٦٤س + ٦$.

(أ) مثل مسار هذا الرمح بيانياً.

(ب) ما الارتفاع الذي أطلق منه الرمح؟

(ج) ما أقصى ارتفاع يصله الرمح؟

تأكد

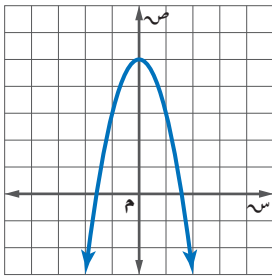
استعمل جدول القيم، لتمثيل كل دالة فيما يأتي بيانياً، وحدد مجالها ومداها:

مثال ١

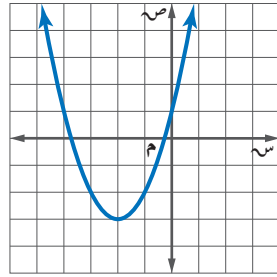
(١) $ص = ٢س^٢ + ٤س - ٦$ (٢) $ص = ٢س^٢ - ٢س - ١$ (٣) $ص = ٣س^٢ - ٦س - ٥$

مثال ٢

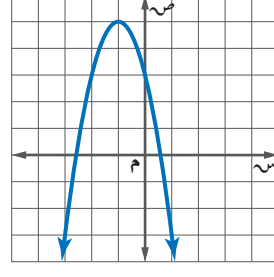
أوجد الرأس، ومعادلة محور التماثل، والمقطع الصادي لكل تمثيل بياني فيما يأتي:



(٦)



(٥)



(٤)

أوجد الرأس، ومعادلة محور التماثل، والمقطع الصادي لكل دالة فيما يأتي:

مثال ٣

(٧) $ص = -٢س^٢ + ٢س + ١$ (٨) $ص = ٢س^٢ - ٤س + ٥$ (٩) $ص = ٤س^٢ - ٨س + ٩$

مثال ٤

في الأسئلة ١٠-١٢ أجب عما يأتي:

(أ) حدّد فيما إذا كان للدالة قيمة صغرى أم قيمة عظمى.

(ب) أوجد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى.

(ج) حدّد مجال الدالة ومداها.

(١٠) $ص = -٢س^٢ + ٢س + ٢$ (١١) $ص = -٣س^٢ + ٦س + ٣$ (١٢) $ص = -٢س^٢ + ٨س - ٦$

مثال ٥

مثل كل دالة فيما يأتي بيانياً:

(١٣) $ص = -٣س^٢ + ٦س + ٣$ (١٤) $ص = -٢س^٢ + ٤س + ١$ (١٥) $ص = ٢س^٢ - ٨س - ٤$

مثال ٦

١٦) كرة: يقذف ياسر كرة في الهواء، وفق المعادلة $ص = -١٦س^٢ + ١٦س + ٥$ حيث تمثّل (ص) ارتفاع الكرة بالأقدام بعد (س) ثانية.

(أ) مثل هذه الدالة بيانياً.

(ب) ما الارتفاع الذي قُذفت منه الكرة؟

(ج) ما أقصى ارتفاع تصله الكرة من سطح الأرض؟



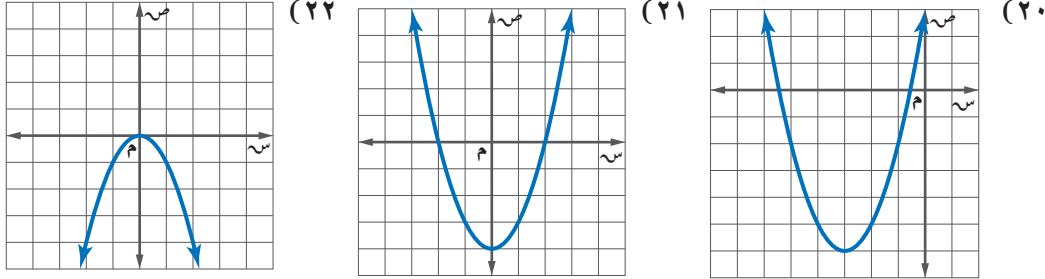
مثال ١

استعمل جدول القيم لتمثيل كل دالة فيما يأتي بيانيًا، وحدد مجالها ومدنها.

(١٧) $\text{ص} = \text{س}^2 + ٤\text{س} + ٦$ (١٨) $\text{ص} = ٢\text{س}^2 + ٤\text{س} + ٧$ (١٩) $\text{ص} = ٢\text{س}^2 - ٨\text{س} - ٥$

مثال ٢

أوجد الرأس ومعادلة محور التماثل، والمقطع الصادي لكل تمثيل بياني فيما يأتي:



مثال ٣

تقنية: أوجد الرأس، ومعادلة محور التماثل، والمقطع الصادي لكل دالة فيما يلي، ومثلها بيانيًا باستخدام أحد التطبيقات الحاسوبية.

(٢٣) $\text{ص} = \text{س}^2 + ٨\text{س} + ١٠$ (٢٤) $\text{ص} = ٢\text{س}^2 + ١٢\text{س} + ١٠$ (٢٥) $\text{ص} = -٣\text{س}^2 - ٦\text{س} + ٧$

مثال ٤

في الأسئلة ٢٦-٢٨، أجب عما يأتي:

(أ) حدّد فيما إذا كان للدالة قيمة صغرى أو قيمة عظمى.

(ب) أوجد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى.

(ج) حدّد مجال الدالة ومدنها؟

(٢٦) $\text{ص} = -٢\text{س}^2 - ٨\text{س} + ١$ (٢٧) $\text{ص} = \text{س}^2 + ٤\text{س} - ٥$ (٢٨) $\text{ص} = ٣\text{س}^2 + ١٨\text{س} - ٢١$

مثال ٥

مثّل كل دالة فيما يأتي بيانيًا:

(٢٩) $\text{ص} = -٣\text{س}^2 + ٦\text{س} - ٤$ (٣٠) $\text{ص} = -٢\text{س}^2 - ٤\text{س} - ٣$ (٣١) $\text{ص} = ٣\text{س}^2 - ١٢\text{س} + ٥$

(٣٢) **كرة قدم:** قذف حارس المرمى الكرة من مستوى سطح الأرض إلى الأعلى بسرعة ابتدائية مقدارها ٩٠ قدمًا في الثانية، والدالة $\text{ص} = -١٦\text{ن}^2 + ٩٠\text{ن}$ تمثّل ارتفاع الكرة بعد (ن) ثانية.

(أ) ما ارتفاع الكرة بعد ثانية واحدة؟

(ب) متى تكون الكرة على ارتفاع ١٢٦ قدمًا؟

(ج) ما أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة؟



الرابط مع الحياة

عندما ينطلق الجسم أو الأداة في الهواء يسمى مقذوفًا، وقد يكون هذا الجسم أداة جامدة مثل الرمح، قرص، كرة، أو كائن حي مثل الوثب العالي، والوثب الطويل.



(٣٣) تمثيلات متعددة: سوف تكتشف في هذه المسألة حل المعادلات التربيعية باستعمال جداول القيم.

(أ) جبرياً: حدّد الدالة المرتبطة بكل معادلة فيما يأتي، ثم انسخ الجدول وأكمله.

المعادلة	الدالة المرتبطة	الأصفار
$س^2 - س = ١٢$		
$س^2 + س٨ = ٩$		
$س^2 = ١٤س - ٢٤$		
$س^2 + ١٦س = ٢٨$		

(ب) بيانياً: مثل كل دالة مرتبطة باستعمال الحاسبة البيانية.

(ج) تحليلياً: استعمل قيم الجدول الموجودة على حاسبتك لتحديد أصفار كل دالة مرتبطة، ثم اكتب الأصفار في الجدول أعلاه.

(د) لفظياً: وضح العلاقة بين عدد حلول المعادلة وأصفار الدالة المرتبطة بها؟

إرشادات للدراسة

الأصفار

عدد أصفار الدالة يساوي درجة الدالة مع احتساب الجذر المكرر.

مسائل مهارات التفكير العليا

(٣٤) مسألة مفتوحة: اكتب دالة تربيعية معادلة محور التماثل لتمثيلها البياني هي $س = -\frac{٣}{٨}$ ، ملخصاً خطوات عملك.

(٣٥) اكتشاف الخطأ: تحاول عبير ومنى إيجاد محور التماثل للقطع المكافئ، فأيهما كانت إجابتها صحيحة؟ فسّر إجابتك.

عبير

$$ص = س^2 - ٤س + ٦$$

$$س = \frac{ب}{١٢}$$

$$س = \frac{٤-}{(١-)^2}$$

$$س = ٢$$

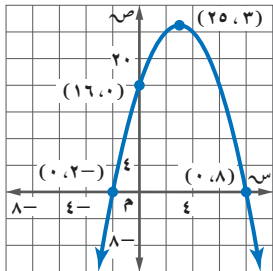
منى

$$ص = س^2 - ٤س + ٦$$

$$س = \frac{ب}{١٢}$$

$$س = \frac{٤-}{(١-)^2}$$

$$س = ٢$$



(٣٦) تحدّد: اكتب معادلة التمثيل البياني المجاور باستعمال محور التماثل وأحد المقطعين السينيين.

(٣٧) تبرير: إذا كان رأس قطع مكافئ هو النقطة (٠, ٢)، وإحدى نقاطه (٩, ٥)، فأوجد نقطة أخرى عليه، واطرح طريقة إيجادها.

(٣٨) اكتب: وضح كيفية إيجاد محور التماثل لمعادلة الدالة التربيعية، ثم فسّر الخصائص الأخرى للتمثيل البياني التي يمكنك اشتقاقها منه، وكيف توصّلت إليها.

تدريب على اختبار

- (٤٠) ما مدى الدالة د (س) = $4س^2 - \frac{1}{3}$ ؟
- (أ) جميع الأعداد الصحيحة التي تقل عن أو تساوي $\frac{1}{3}$
- (ب) جميع الأعداد الصحيحة غير السالبة
- (ج) جميع الأعداد الحقيقية
- (د) جميع الأعداد الحقيقية التي تقل عن أو تساوي $-\frac{1}{3}$



$$r = 36 \text{ ط}$$

(٣٩) هندسة: دائرة مساحتها ٣٦ ط وحدة مربعة، إذا زاد نصف قطرها إلى مثليه، فكم تصبح مساحة الدائرة الجديدة؟

- (أ) ٧٢ ط وحدة مربعة (ج) ١٢٩٦ ط وحدة مربعة
- (ب) ١٤٤ ط وحدة مربعة (د) ٩ ط وحدة مربعة

مراجعة تراكمية

حدّد إذا كانت كل ثلاثية حدود فيما يأتي تشكّل مربعًا كاملاً، اكتب "نعم" أو "لا"، وإذا كانت كذلك فحلّلها: (مهارة سابقة)

(٤٣) $٩س^٢ + ٨س + ١٦$

(٤٢) $٤س^٢ - ٢٠س + ٢٥$

(٤١) $٤س^٢ + ٤س + ١$

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

أوجد المقطع السيني للتمثيل البياني لكل معادلة فيما يأتي:

(٤٦) $٣س - ص = ١٨$

(٤٥) $٢س - ٣ص = ١٢$

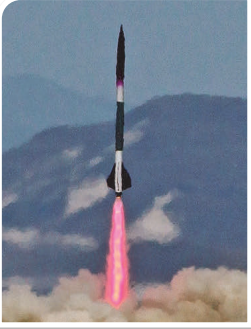
(٤٤) $٢ص + س = ١٠$





١-٨ معدل التغير في الدالة التربيعية

أطلق نموذج صاروخ من الأرض إلى الأعلى بسرعة ١٤٤ قدمًا/ثانية، والدالة $s = -16t^2 + 144t$ تمثل ارتفاع الصاروخ (ص) بعد (س) ثانية، يمكنك استقصاء معدل التغير في ارتفاع الصاروخ باستعمال الدالة التربيعية.

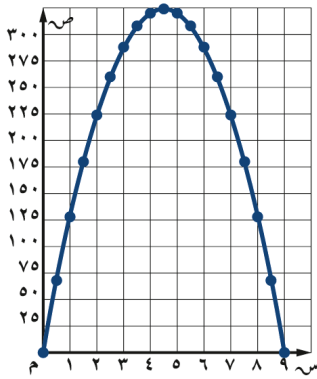


نشاط

الخطوة ١: انسخ الجدول أدناه.

س	٠	٠,٥	١,٠	١,٥	...	٩,٠
ص	٠					
معدل التغير	—					

الخطوة ٢: أوجد قيمة ص عند كل قيمة من قيم س من ٠ إلى ٩.



الخطوة ٣: مثل الأزواج المرتبة (س، ص) على ورقة مربعات، ثم صل بين النقاط بمنحنى، ولاحظ أن الدالة تزايد عندما $s > 0$ ، $s > 4,5$ ، وتتناقص عندما $s < 4,5$ ، $s > 9$.

الخطوة ٤: تذكر أن معدل التغير هو التغير في ص مقسومًا على التغير في س، أوجد معدل التغير عند كل فترة طولها نصف ثانية.

تمارين

استعمل الدالة التربيعية $s = -16t^2 + 144t$

(١) أنشئ جدولاً للدالة مشابهًا للجدول الوارد في النشاط مستعملًا قيم س: -٤، -٣، -٢، -١، ٠، ١، ٢، ٣، ٤، ثم أوجد قيم ص عند كل قيمة من قيم س.

(٢) مثل بيانيًا الأزواج المرتبة على ورقة مربعات، وصل بين النقاط بمنحنى، ثم صف تزايد الدالة وتناقصها.

(٣) أوجد معدل التغير في كل عمود بدءًا من $s = -3$ ، وقارن بين معدلات التغير عندما تزايد الدالة، وعندما تناقص.

(٤) **تحذير:** إذا أسقط جسم من ارتفاع ١٠٠ قدم في الهواء فإنه يسقط بمعدل يمكن تمثيله بالدالة $s = -16t^2 + 100t$ مع تجاهل مقاومة الهواء، حيث تمثل د (س) ارتفاع الجسم بالأقدام بعد (س) ثانية، أنشئ جدولاً للقيم كما في الجدول الوارد في تمرين ١، واختر قيمًا مناسبة لـ (س)، وأكمل الجدول بقيم س، ص ومعدلات التغير، ثم قارن بين هذه المعدلات، وصف الأنماط التي تلاحظها.





حل المعادلات التربيعية بيانياً

لماذا؟



يعبر عن المسار المنحني لكرة قدم رُكّلت داخل ملعب بالدالة $ص = -س^2 + ١٨س$ ؛ حيث (س) المسافة الأفقية التي قطعها الكرة بالأمتار، (ص) ارتفاع الكرة فوق سطح الأرض بالأمتار.

ويمكن استعمال المقاطع السينية للتمثيل البياني لهذه الدالة لتحديد المسافة الأفقية التي ستقطعها الكرة حتى تلمس الأرض.

فيما سبق

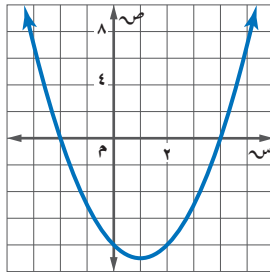
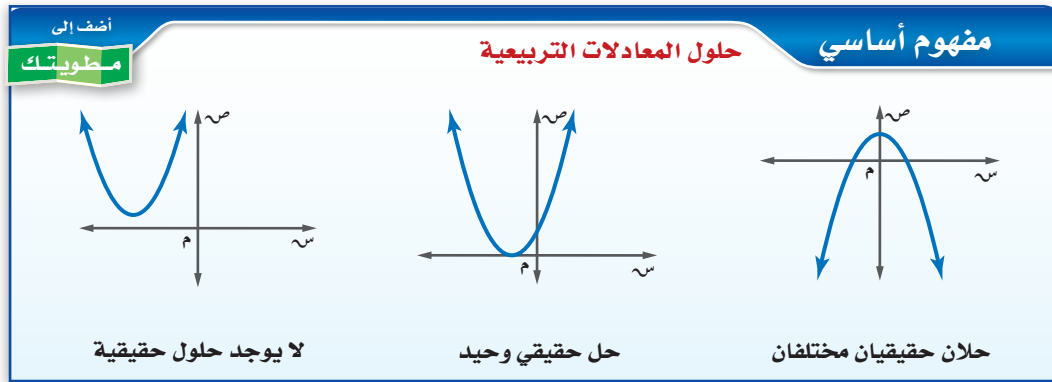
درست حل المعادلات التربيعية بالتحليل إلى العوامل.

والآن

- أحل المعادلات التربيعية بيانياً.
- أقدر حلول المعادلات التربيعية من تمثيلها البياني.

المفردات

الجذر المكرر



مثال ١ جذران حقيقيان مختلفان

حل المعادلة $ص = ٨ - ٢س - س^2$ بيانياً.

مثل الدالة د (س) = $٨ - ٢س - س^2$ المرتبطة بالمعادلة بيانياً.

تظهر المقاطع السينية للتمثيل البياني عند ٢ ، ٤ ؛ لذا فالحلول هي ٢ ، ٤ .

تحقق: تحقق من صحة كل حل بالتعويض في المعادلة الأصلية.

$$٠ = ٨ - ٢س - س^2$$

$$٠ \stackrel{?}{=} ٨ - (٤)٢ - (٤)^2$$

$$٠ = ٠$$

المعادلة الأصلية

$$٠ = ٨ - ٢س - س^2$$

بسط.

$$٠ = ٨ - ٢س - س^2$$

$$٠ \stackrel{?}{=} ٨ - (٢)٢ - (٢)^2$$

$$٠ = ٠$$

تحقق من فهمك

$$٠ = ٣ + س - س^2 \quad (أ)$$

$$٠ = ١٨ + س - س^2 \quad (ب)$$

حلول المعادلة في مثال ١ عدنان حقيقيان مختلفان، إلا أنه أحياناً يكون الجذران هما العدد نفسه، ويُسمى عندها **جذراً مكرراً**.

مثال ٢

جذر مكرر

حل المعادلة $s^2 - 6s = -9$ بيانياً.

الخطوة ١: أعد كتابة المعادلة بالصورة القياسية.

المعادلة الأصلية

$$s^2 - 6s = -9$$

أضف ٩ إلى كلا الطرفين.

$$s^2 - 6s + 9 = 0$$

الخطوة ٢: مثل الدالة المرتبطة $d(s) = s^2 - 6s + 9$

الخطوة ٣: حدّد المقطع السيني للتمثيل البياني، ولاحظ أن رأس القطع

المكافئ هو المقطع السيني الوحيد للدالة؛ لذا فإن للمعادلة حلًا وحيداً هو ٣

تحقق:

حل المعادلة بالتحليل إلى العوامل

$$s^2 - 6s + 9 = 0$$

$$0 = (s - 3)(s - 3)$$

$$s - 3 = 0 \quad \text{أو} \quad s - 3 = 0$$

$$s = 3 \quad s = 3$$

الحل الوحيد هو ٣

تحقق من فهمك

$$(٢ب) \quad s^2 - 8s = -16$$

$$(١٢) \quad s^2 + 25 = 10s$$

تنبيه

الحلول الدقيقة

قد تظهر الحلول التي نتوصل إليها من التمثيل البياني على أنها دقيقة، إلا أنه لا يمكنك التأكد من ذلك ما لم تتحقق منها في المعادلة الأصلية.

كما أن هناك معادلات تربيعية ليس لها حلول حقيقية.

مثال ٣

لا يوجد جذور حقيقية

حل المعادلة $s^2 - 3s + 5 = 0$ بيانياً.

الخطوة ١: أعد كتابة المعادلة بالصورة القياسية.

المعادلة مكتوبة بالصورة القياسية.

الخطوة ٢: مثل الدالة المرتبطة $d(s) = s^2 - 3s + 5$

الخطوة ٣: حدّد المقطع السيني للتمثيل البياني للدالة. لاحظ أن

التمثيل البياني ليس له مقطع سيني؛ لذا فليس للمعادلة جذور حقيقية، وبالتالي فإن مجموعة الحل هي $\emptyset$.

تحقق:

حل المعادلة بالتحليل إلى العوامل.

لا يوجد عوامل للعدد ١٠ مجموعها -٣، لذا فالعبارة غير قابلة للتحليل إلى العوامل، أي أنه لا يوجد للمعادلة حلول حقيقية.

تحقق من فهمك

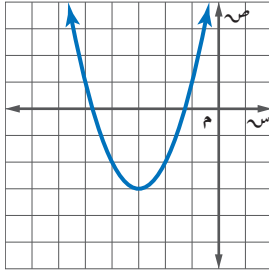
$$(٣ب) \quad s^2 - 2s - 8 = 6s$$

$$(١٣) \quad s^2 - 3s = 5$$



تقدير الحلول: تمثّل الجذور التي وجدت للمعادلات السابقة أعدادًا صحيحة، إلا أن جذور المعادلات التربيعية ليست دائمًا كذلك، ويستعمل في هذه الحالات التقدير لإيجاد قيم تقريبية لجذور المعادلة.

مثال ٤ تقدير الجذور باستعمال الجدول



حلّ المعادلة $x^2 + 6x + 6 = 0$ بيانيًا، وإذا لم تكن الجذور أعدادًا صحيحة، فقدّرها إلى أقرب جزء من عشرة.

مثل الدالة المرتبطة $D(x) = x^2 + 6x + 6$ بيانيًا.

يقع المقطعان السينيان بين -٥، -٤، وبين -٢، -١.

أنشئ جدولاً بتدريج طوله ١، ٠ لقيم x التي تقع بين -٥، -٤، وبين -٢، -١. وابحث عن التغير في إشارات قيم الدالة، وتُعد قيمة الدالة الأقرب إلى الصفر هي التقريب الأفضل لصفر الدالة.

س	٤،٩-	٤،٨-	٤،٧-	٤،٦-	٤،٥-	٤،٤-	٤،٣-	٤،٢-	٤،١-
ص	٠،٦١	٠،٢٤	٠،١١-	٠،٤٤-	٠،٧٥-	١،٠٤-	١،٣١-	١،٥٦-	١،٧٩-

س	١،٩-	١،٨-	١،٧-	١،٦-	١،٥-	١،٤-	١،٣-	١،٢-	١،١-
ص	١،٧٩-	١،٥٦-	١،٣١-	١،٠٤-	٠،٧٥-	٠،٤٤-	٠،١١-	٠،٢٤	٠،٦١

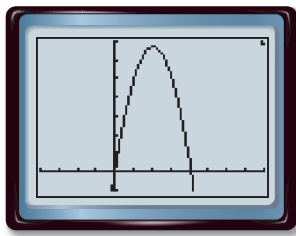
بما أن قيمة الدالة الأقرب إلى الصفر عند تغير الإشارة في كلا الجدولين هي -١، ١١؛ لذا فإن الجذرين التقريبيين هما: -٤، ٧، -١، ٣.

تحقق من فهمك

٤) حلّ المعادلة $x^2 + 2x - 3 = 0$ بيانيًا. وإذا لم تكن الجذور أعدادًا صحيحة، فقدّرها إلى أقرب جزء من عشرة.

يُعدّ تقريب الجذور للدوال التربيعية مفيدًا في تطبيقات من واقع الحياة.

مثال ٥ من واقع الحياة تقدير الجذور باستعمال الحاسبة البيانية



ركل سعد الكرة بقدمه من ارتفاع قدم واحدة من الأرض إلى أعلى بسرعة ٦٥ قدمًا/ثانية، وتمثل الدالة $E = -16n^2 + 65n + 1$ ارتفاع الكرة (ع) بالأقدام بعد (ن) ثانية، فكم تبقى الكرة في الهواء تقريبًا؟

لإيجاد جذور المعادلة $-16n^2 + 65n + 1 = 0$ ، استعمل الحاسبة البيانية في تمثيل الدالة المرتبطة $D(n) = -16n^2 + 65n + 1$.

بما أن المقطع السيني الموجب للتمثيل هو ٤ تقريبًا؛ لذا فإن الكرة بقيت ٤ ثوانٍ تقريبًا في الهواء.

تحقق من فهمك

٥) إذا ركل سعد الكرة من ارتفاع قدمين من الأرض إلى أعلى بسرعة ٥٥ قدمًا/ثانية. فكم تبقى الكرة في الهواء تقريبًا؟

إرشادات للدراسة

مواقع الأصفار

بما أن الدوال التربيعية دوال متصلة؛ لذا يجب أن يوجد صفر بين قيمتي s اللتين يقابلهما قيمتان متعاكستان في الإشارة من s .

الأمثلة ١ - ٣

تقنية: حل كل معادلة فيما يلي بيانيًا باستخدام أحد التطبيقات الحاسوبية.

$$(١) \text{ س}^٢ + ٣\text{ س} - ١٠ = ٠ \quad (٢) \text{ س}^٢ - ٨\text{ س} = ٠ \quad (٣) \text{ س}^٢ + ٤\text{ س} - ٤ = ٠$$

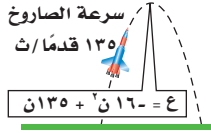
مثال ٤

حلّ كل معادلة فيما يأتي بيانيًا، وإذا لم تكن الجذور أعدادًا صحيحة، فقدّرها إلى أقرب جزء من عشرة:

$$(٤) \text{ س}^٢ - ٥\text{ س} + ١ = ٠ \quad (٥) \text{ س}^٢ - ٩ = ٠ \quad (٦) \text{ س}^٢ = ٢٥$$

مثال ٥

(٧) **معرض العلوم:** إذا صمّم نواف نموذجًا لصاروخ يمكنه أن ينطلق في الهواء وفق المعادلة المبينة في الشكل، حيث (ع) ارتفاع الصاروخ بالأقدام بعد (ن) ثانية من انطلاقه، فكم يبقى الصاروخ في الهواء تقريبًا؟



تدرب وحل المسائل

الأمثلة ١ - ٣

حلّ كل معادلة فيما يأتي بيانيًا:

$$(٨) \text{ س}^٢ + ٧\text{ س} + ١٤ = ٠ \quad (٩) \text{ س}^٢ + ٢\text{ س} - ٢٤ = ٠ \quad (١٠) \text{ س}^٢ - ٢\text{ س} - ١ = ٠$$

مثال ٤

حلّ كل معادلة فيما يأتي بيانيًا، وإذا لم تكن الجذور أعدادًا صحيحة، فقدّرها إلى أقرب جزء من عشرة:

$$(١١) \text{ س}^٢ + ٢\text{ س} - ٩ = ٠ \quad (١٢) \text{ س}^٢ - ٤\text{ س} = ٢٠ \quad (١٣) \text{ س}^٢ + ٣\text{ س} = ١٨$$

مثال ٥

(١٤) **أفعوانية:** ترتفع أفعوانية براكبيها إلى الأعلى، ثم تنزل بهم إلى الأسفل وفق المعادلة: $ع = -١٦ن^٢ + ١٨٥ن$ ، حيث (ع) الارتفاع بالأقدام بعد (ن) ثانية، فكم ثانية تستغرق الأفعوانية للعودة إلى الأسفل؟

استعمل التحليل إلى العوامل لتحديد عدد المرات التي يقطع فيها التمثيل البياني محور السينات في كل دالة مما يأتي، ثم حدّد أصفار كل منها:

$$(١٥) \text{ ص} = \text{س}^٢ - ٨\text{ س} + ١٦ \quad (١٦) \text{ ص} = \text{س}^٢ + ٣\text{ س} + ٤ \quad (١٧) \text{ ص} = \text{س}^٢ + ١٢\text{ س} + ٣٢$$

(١٨) **نظرية الأعداد:** استعمل معادلة تربيعية لإيجاد عددين مجموعهما ٩، وناتج ضربهما ٢٠.

(١٩) **تمثيلات متعددة:** ستكتشف في هذه المسألة كيفية تفسير العلاقة بين الدوال التربيعية وتمثيلاتها البيانية.

(أ) **بيانيًا:** مثل الدالة $ص = \text{س}^٢$.

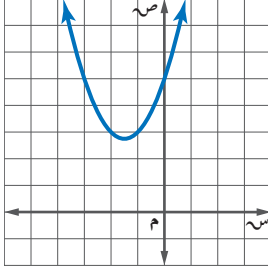
(ب) **تحليليًا:** اكتب إحداثيات الرأس وإحداثيات نقطتين على التمثيل.

(ج) **بيانيًا:** مثل الدوال $ص = \text{س}^٢ + ٢$ ، $ص = \text{س}^٢ + ٤$ ، $ص = \text{س}^٢ + ٦$ بيانيًا على المستوى الإحداثي السابق نفسه.

(د) **تحليليًا:** اكتب إحداثيات الرأس وإحداثيات نقطتين على كل من هذه التمثيلات التي لها الإحداثيات السينية نفسها. ماذا تستنتج؟



مسائل مهارات التفكير العليا



(٢٠) **اكتشف الخطأ:** يقوم معاذ وأحمد بإيجاد عدد الأصفار الحقيقية للدالة الممثلة بالشكل المجاور، فيقول معاذ إنه ليس لهذه الدالة أصفار حقيقية؛ لأنه لا يوجد لتمثيلها البياني مقاطع سينية. بينما يقول أحمد: إن لها صفرًا حقيقيًا واحدًا؛ لأن للتمثيل البياني للدالة مقطعًا صاديًا. فأيهما كانت إجابته صحيحة؟ فسر إجابتك.

(٢١) **مسألة مفتوحة:** صف مسألة من واقع الحياة يتم فيها قذف جسم في الهواء، واكتب معادلة تمثل ارتفاع الجسم بالنسبة للزمن، وحدد الفترة الزمنية التي يمكنها الجسم في الهواء.

(٢٢) **تحذّر:** اكتب معادلة تربيعية لها الجذور المذكورة في كل مما يأتي:

(أ) جذر مكرر مرة واحدة.

(ب) جذر نسبي (غير صحيح) واحد، وجذر صحيح واحد.

(ج) جذران صحيحان مختلفان ومتعاكسان جمعياً.

(٢٣) **اكتب:** وضح كيف تقرب جذور المعادلة التربيعية عندما لا تكون أعداداً صحيحة.

تدريب على اختبار

(٢٥) تمثل الصيغة $f = \frac{1}{p}$ جـ ن $\frac{1}{p}$ المسافة (ف) بالأمتار التي يقطعها جسم يسقط على كوكب سقوطاً حرّاً بعد (ن) ثانية. اكتب الصيغة بدلالة المتغير جـ، الذي يمثل تسارع الجاذبية.

(أ) جـ = $\frac{1}{p} - 2$ ف جـ = $\frac{1}{p} - 2$ ف جـ = $\frac{1}{p} - 2$ ف جـ = $\frac{1}{p} - 2$ ف
(ب) جـ = $2 - \frac{1}{p}$ ف جـ = $2 - \frac{1}{p}$ ف جـ = $2 - \frac{1}{p}$ ف جـ = $2 - \frac{1}{p}$ ف
(د) جـ = $\frac{2}{p}$ ف جـ = $\frac{2}{p}$ ف جـ = $\frac{2}{p}$ ف جـ = $\frac{2}{p}$ ف

(٢٤) إذا حصل إبراهيم على الدرجة ٥٠ في اختبار درجته العظمى ٨٠. فما النسبة المئوية لدرجته في الاختبار؟

(أ) ٦٢,٥ % (ب) ٦٢,٥ % (ج) ١,٦ % (د) ١٦,٠ %

(أ) ٦٢,٥ % (ب) ٦٢,٥ % (ج) ١,٦ % (د) ١٦,٠ %

مراجعة تراكمية

أوجد إحداثيات الرأس، ومعادلة محور التماثل، وبيّن إذا كان الرأس يمثل قيمة عظمى أم قيمة صغرى، ثم مثل الدالة بيانياً: (الدرس ٨-١)

(٢٦) ص = $3س^2$ (٢٧) ص = $س^2 - ٦س - ٨$ (٢٨) ص = $-٤س^2 - ٨س + ٥$ (٢٩) ص = $٣س^2 + ٢س + ١$

حلّ كل معادلة فيما يأتي، وتحقق من صحة الحل: (مهارة سابقة)

(٣٠) $٣٢ = ٢س^2$ (٣١) $٢٥ = (س - ٤)^2$ (٣٢) $٣٢ = ٤س^2 - ٤س + ١$ (٣٣) $٣٢ = ٢س^2 + ١٦س - ٣٢$

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة: حدّد ما إذا كانت كل ثلاثية حدود فيما يأتي تشكل مربعاً كاملاً، اكتب "نعم" أو "لا"، وإذا كانت كذلك فحلّها:

(٣٤) $٩س + ١٦س^2 - ٢٤س$ (٣٥) $٩س + ١٦س^2 - ٢٤س$ (٣٦) $٣٦ + ٢٥س^2 - ٦٠س$

(٣٧) $٨١س + ٨س^2 - ٢٤س$ (٣٨) $٤٩س + ٣٦س^2 - ٨٤س$ (٣٩) $٩س + ٤س^2 - ٣س$





استعمل جدول القيم لتمثيل كل دالة فيما يأتي بيانيًا، وحدّد مجالها ومداها: (الدرس ٨-١)

$$(١) \text{ ص} = \text{س}^٢ + ٣\text{س} + ١$$

$$(٢) \text{ ص} = \text{س}^٢ - ٢\text{س} + ٤$$

$$(٣) \text{ ص} = -\text{س}^٢ - ٣\text{س} - ٣$$

$$(٤) \text{ ص} = -٣\text{س}^٢ - ٢\text{س} + ١$$

إذا كانت: $\text{ص} = \text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٤$ (الدرس ٨-١)

(٥) اكتب معادلة محور التماثل.

(٦) أوجد الرأس، وحدّد ما إذا كان يمثل نقطة صغرى أو عظمى.

(٧) مثل الدالة بيانيًا.

(٨) **كرة:** تم ركل كرة من على سطح الأرض بسرعة ٩٠ قدمًا/ثانية،

إذا كانت المعادلة: $\text{ع} = -١٦\text{ن}^٢ + ٩٠\text{ن}$ ، تعبّر عن ارتفاع الكرة

بعد ن ثانية من إطلاقها. (الدرس ٨-١)

(أ) أوجد ارتفاع الكرة بعد ثانية من إطلاقها.

(ب) متى تصل الكرة إلى أقصى ارتفاع؟

(ج) متى يكون ارتفاع الكرة عن سطح الأرض مساويًا

للصفر؟ وضح معنى ذلك.

(٩) **اختيار من متعدد:** التمثيل البياني للدالة:

$$\text{ص} = \text{س}^٢ - ٣\text{س} + ١ \quad (\text{الدرس ٨-١})$$

(أ) مفتوح إلى أعلى وله قيمة عظمى.

(ب) مفتوح إلى أعلى وله قيمة صغرى.

(ج) مفتوح إلى أسفل وله قيمة عظمى.

(د) مفتوح إلى أسفل وله قيمة صغرى.

حلّ كل معادلة فيما يأتي بيانيًا، وإذا لم تكن الجذور أعدادًا صحيحة

فقدّرهما إلى أقرب جزء من عشرة: (الدرس ٨-٢)

$$(١٠) \text{س}^٢ + ٥\text{س} + ٦ = ٠$$

$$(١١) \text{س}^٢ + ٨ = -٦\text{س}$$

$$(١٢) -\text{س}^٢ + ٣\text{س} - ١ = ٠$$

$$(١٣) \text{س}^٢ = ١٢$$

(١٤) **كرة البيسبول:** المعادلة: $\text{ع} = -١٦\text{ن}^٢ + ١٢٠\text{ن}$ ، تمثل

ارتفاع كرة البيسبول بعد ن ثانية من ضربها، أوجد الوقت الذي

تبقى فيه الكرة في الهواء. (الدرس ٨-٢)

استعمل التحليل إلى عوامل؛ لتحديد عدد المرات التي يقطع فيها

التمثيل البياني محور السينات في كل دالة ممّا يأتي، ثم حدّد أصفار

كلّ منها: (الدرس ٨-٢)

$$(١٥) \text{ص} = \text{س}^٢ - ٣\text{س} + ٢$$

$$(١٦) \text{ص} = \text{س}^٢$$

$$(١٧) \text{ص} = \text{س}^٢ + ٤\text{س} + ٤$$

$$(١٨) \text{ص} = \text{س}^٢ + ٣\text{س} + ٣$$



حل المعادلات التربيعية بإكمال المربع

رابط الدرس الرقمي



www.ien.edu.sa

لماذا؟



يسدّد لاعبو كرة السلة بعض كراتهم نحو المرمى بمسار يمكن تمثيله بالمعادلة: $ع = -٩س + ١٨س + ٥$ ، حيث تمثل (ع) ارتفاع الكرة بعد (س) ثانية. ويمكن إيجاد الزمن عند أي ارتفاع معطى للكرة؛ فمثلاً لإيجاد الزمن عندما تكون الكرة على ارتفاع ٤ أمتار، نحتاج إلى حل المعادلة: $٤ = -٩س + ١٨س + ٥$ باستعمال طرق مختلفة منها طريقة إكمال المربع.

فيما سبق

درست حل معادلات تربيعية باستعمال خاصية الجذر التربيعي.

والآن

- أكتب العبارة التربيعية على صورة مربع كامل.
- أحل معادلات تربيعية بإكمال المربع.

المفردات

إكمال المربع

إكمال المربع: درست في الدرس ٦-٧ حل معادلات تربيعية بإيجاد الجذر التربيعي لكل طرف منها، والتي تستعمل فقط إذا كان المقدار الواقع على الطرف الأيمن مربعاً كاملاً، أما في العبارات ثلاثية الحدود التربيعية التي تمثل مربعات كاملة والتي يكون معاملها الرئيس ١، فهناك علاقة بين معامل الحد الذي يحتوي س والحد الثابت.

$$(س + ٥)^٢ = س^٢ + ٢(٥)س + ٥^٢$$

$$= س^٢ + ١٠س + ٢٥$$

لاحظ أن $\left(\frac{١٠}{٢}\right)^٢ = ٢٥$ ، ويمكن الحصول على الحد الثابت، بقسمة معامل الحد الذي يحتوي س على ٢، وتربيع الناتج، يمكن استعمال هذه الفكرة في تحويل أي عبارة تربيعية على الصورة $س^٢ + ب س$ إلى مربع كامل باستعمال طريقة تُسمى **إكمال المربع**.

أضف إلى

مطويتك

مفهوم أساسي

إكمال المربع

التعبير اللفظي: لإكمال المربع في أي عبارة تربيعية على الصورة $س^٢ + ب س$ ، اتبع الخطوات الآتية:

الخطوة ١: أوجد نصف ب (معامل س)

الخطوة ٢: رّبّع الناتج في الخطوة ١.

الخطوة ٣: أضف الناتج من الخطوة ٢ إلى $س^٢ + ب س$ ، ثم اكتب العبارة على صورة مربع كامل.

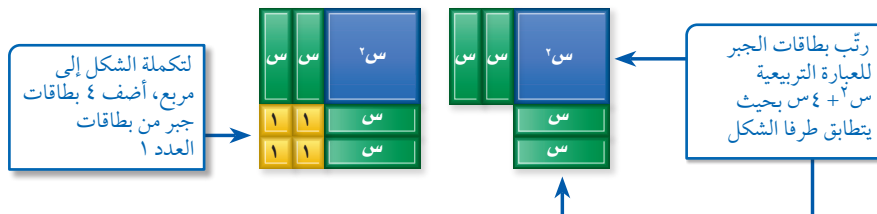
$$س^٢ + ب س + \left(\frac{ب}{٢}\right)^٢ = \left(س + \frac{ب}{٢}\right)^٢$$

الرموز:

مثال ١ إكمال المربع

أوجد قيمة ج التي تجعل ثلاثية الحدود: $س^٢ + ٤س + ج$ مربعاً كاملاً.

الطريقة ١: استعمال بطاقات الجبر.

إذن $ج = ٤$

إرشادات للدراسة

الخوارزمية

الخوارزمية هي سلسلة خطوات لإجراء عملية أو لحل مسألة.

الطريقة ٢: استعمال خوارزمية إكمال المربع.

الخطوة ١: أوجد $\frac{1}{4}$ العدد ٤.

الخطوة ٢: رتب الناتج من الخطوة ١.

الخطوة ٣: أضف الناتج من الخطوة ٢ إلى $س + ٤$.
إذن، ج = ٤، لاحظ أن $س + ٤ + ٤ = (س + ٢) + ٤$.

تحقق من فهمك

(١) أوجد قيمة ج التي تجعل ثلاثية الحدود $س^٢ - ٨س + ٤$ مربعًا كاملاً.

حل المعادلات بإكمال المربع: يمكن استعمال طريقة إكمال المربع لحل المعادلات التربيعية، والتي تتطلب فصل الحدين $س^٢$ ، ب س أولاً.

مثال ٢

حل معادلة بإكمال المربع

حل المعادلة: $س^٢ - ٦س + ١٢ = ١٩$ بإكمال المربع.

$$س^٢ - ٦س + ١٢ = ١٩ \quad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$س^٢ - ٦س = ٧$$

اطرح ١٢ من كلا الطرفين

$$س^٢ - ٦س + ٩ = ٩ + ٧ \quad \text{بما أن } \left(\frac{-٦}{٢}\right)^٢ = ٩ \text{؛ لذا أضف ٩ إلى كلا الطرفين}$$

$$(س - ٣)^٢ = ١٦$$

حلل $س^٢ - ٦س + ٩$

$$س - ٣ = \pm ٤$$

أوجد الجذر التربيعي لكلا الطرفين

$$س = ٣ \pm ٤$$

أضف ٣ إلى كل طرف

$$س = ٣ + ٤ \text{ أو } س = ٣ - ٤$$

افصل الحدين

$$س = ٧ \quad \text{بسط}$$

$$س = -١ \quad \text{إذن الحلان هما ٧، -١}$$

تحقق من فهمك

(٢) حل المعادلة: $س^٢ - ١٢س + ٣ = ٨$ بإكمال المربع.

لحل معادلة تربيعية معاملها الرئيس لا يساوي ١، اقسم كل حد على هذا المعامل، ثم افصل الحدين اللذين يحتويان $س^٢$ ، س ثم أكمل المربع.

مثال ٣

معادلة فيها $١ \neq$

حل المعادلة: $س^٢ - ٢س + ٨ = ١٨$ بإكمال المربع.

$$س^٢ - ٢س + ٨ = ١٨$$

$$\frac{س^٢ - ٢س + ٨}{٢} = \frac{١٨}{٢}$$

اقسم كلا الطرفين على ٢

$$س^٢ - ٢س + ٤ = ٩$$

بسط

$$س^٢ - ٢س = ٥$$

اطرح ٩ من كلا الطرفين

$$س^٢ - ٢س + ٤ = ٤ + ٥ \quad \text{بما أن } \left(\frac{-٢}{٢}\right)^٢ = ١ \text{؛ لذا أضف ٤ إلى كلا الطرفين}$$

$$(س - ١)^٢ = ٩$$

حلل $س^٢ - ٢س + ٤$

لا توجد أعداد حقيقية مربعاتها سالبة؛ لذا فالمعادلة ليس لها حلول حقيقية.

تحقق من فهمك

(٣) حل المعادلة: $س^٢ - ٩س - ٣ = ٢١$ بإكمال المربع.

تنبيه

المعامل الرئيس

تذكر أن المعامل الرئيس يجب أن يساوي ١ قبل إجراء عملية إكمال المربع.



مثال ٤ من واقع الحياة حل مسألة بإكمال المربع

زي رياضي: أراد أحد الفرق الرياضية شراء زيّ خاص بلاعبي كرة القدم، إذا أمكن تمثيل تكلفة الزي الرياضي بالمعادلة: $ك = ٢, ٠س + ٨, ٤س + ٣٥٠$ ، حيث (ك) ثمن (س) قطعة من هذا الزي، فما عدد القطع التي يمكن شراؤها بمبلغ ٨٦٠ ريالاً؟

المبلغ الكلي ٨٦٠ ريالاً؛ لذا اجعل المعادلة تساوي ٨٦٠، ثم أكمل المربع.

المعادلة الأصلية

$$٢, ٠س + ٨, ٤س + ٣٥٠ = ٨٦٠$$

اقسم كل طرف على ٢, ٠

$$\frac{٢, ٠س + ٨, ٤س + ٣٥٠}{٢, ٠} = \frac{٨٦٠}{٢, ٠}$$

بسّط

$$س + ٢٤ + ١٧٥٠ = ٤٣٠٠$$

اطرح ١٧٥٠ من كلا الطرفين

$$س + ٢٤ + ١٧٥٠ - ١٧٥٠ = ٤٣٠٠ - ١٧٥٠$$

بسّط

$$س + ٢٤ = ٢٥٥٠$$

بما أن $(\frac{٢٤}{٢}) = ١٢$ ؛ لذا أضف ١٢ إلى كلا الطرفين

$$س + ٢٤ + ١٢ = ٢٥٥٠ + ١٢$$

بسّط

$$س + ٣٦ = ٢٦٩٤$$

حلّل $س + ٣٦$ إلى العوامل

$$س + ٣٦ = (س + ١٢) \cdot ٢$$

أوجد الجذر التربيعي لكلا الطرفين

$$\sqrt{س + ٣٦} = \sqrt{(س + ١٢) \cdot ٢}$$

اطرح ١٢ من كلا الطرفين

$$\sqrt{س + ٣٦} - ١٢ = ٠$$

استعمل الحاسبة لتقريب قيمتي س.

افصل الحلين

$$\sqrt{س + ٣٦} - ١٢ = ٠ \quad \text{أو} \quad \sqrt{س + ٣٦} + ١٢ = ٠$$

أوجد القيم التقريبية

$$٩, ٣٩ \approx \quad \text{أو} \quad ٩, ٦٣ \approx$$

بما أنه لا يمكن أن نشترى عدداً سالباً من القطع فالحل السالب غير معقول، إذن يمكن شراء ٣٩ قطعة من هذا الزي.

تحقق من فهمك

(٤) إذا أمكن زيادة المبلغ إلى ٩٨٠ ريالاً، فما عدد قطع الزي التي يمكن شراؤها؟

تأكد

مثال ١

أوجد قيمة ج التي تجعل كل ثلاثية حدود فيما يأتي مربعاً كاملاً:

$$(١) \quad س - ١٨ + ج$$

$$(٢) \quad س + ٢٢ + ج$$

$$(٣) \quad س + ٩ + ج$$

$$(٤) \quad س - ٧ + ج$$

حلّل كل معادلة فيما يأتي بإكمال المربع، مقرباً الحل إلى أقرب جزء من عشرة إذا كان ذلك ضرورياً:

$$(٥) \quad س + ٤ = ٦$$

$$(٦) \quad س - ٨ = ٩$$

$$(٧) \quad س + ٩ - ١ = ٠$$

$$(٨) \quad س - ٢ + ١٠ + ٢٢ = ٤$$

المثالان ٢، ٣

مثال ٤

(٩) **إنشاءات:** يبني إسماعيل صالة مستطيلة الشكل خلف منزل عائلته، مساحتها ١٤٤ متراً مربعاً، وطولها يزيد على عرضها بمقدار ١٠ أمتار، فما بُعدا الصالة؟

مثال ١

أوجد قيمة جـ التي تجعل كل ثلاثية حدود فيما يأتي مربعًا كاملاً:

(١٠) $س^٢ + ٢٦س + جـ$ (١١) $س^٢ - ٢٤س + جـ$ (١٢) $س^٢ - ١٩س + جـ$

(١٣) $س^٢ - ٢٢س + جـ$ (١٤) $س^٢ - ١٥س + جـ$ (١٥) $س^٢ - ١٣س + جـ$

المثالان ٢، ٣

حلّ كل معادلة فيما يأتي بإكمال المربع، مقررًا الحل إلى أقرب جزء من عشرة إذا كان ذلك ضروريًا:

(١٦) $س^٢ + ٦س - ١٦ = ٠$ (١٧) $س^٢ - ٢س - ١٤ = ٠$

(١٨) $س^٢ - ٨س - ١ = ٨$ (١٩) $س^٢ + ٣س + ٢ = ٢٢$

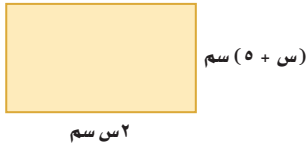
(٢٠) $س^٢ - ٢س + ٧ = ٥$ (٢١) $س^٢ + ١٢س + ٨١ = ١٥$

مثال ٤

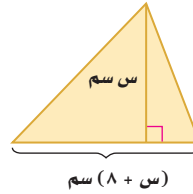
(٢٢) **ثقافة مالية:** يمكن تمثيل سعر سهم معين (س) بالمعادلة التربيعية $س = ٥ - ٣س + ٠,٥س^٢$ ، حيث (ن) عدد الأيام بعد شراء الأسهم، فمتى يصبح سعر السهم ٦٠ ريالاً؟

هندسة: أوجد قيمة س في كل شكل مما يأتي، وقرب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة إذا كان ذلك ضروريًا: (م: المساحة)

(٢٤) $م = ١١٠سم^٢$



(٢٣) $م = ٤٥سم^٢$

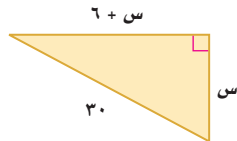


الربط مع الحياة

البضاعة التي ليس لها أصول حقيقية، بل أوراق أو أصول مالية تكون غالبًا أسهمًا وسندات، ويتم تداولها في سوق يُسمى سوق الأسهم، ولهذا السوق قواعد قانونية وفنية تحكم أدائه.

(٢٥) **نظرية الأعداد:** عدنان وصحيحان زوجيان متتاليان ناتج ضربهما ٢٢٤، فما هما؟

(٢٦) **هندسة:** أوجد مساحة المثلث المجاور.



(٢٧) **علم الفلك:** يُعبّر عن ارتفاع جسم بعد ثانية من سقوطه بالمعادلة $ل = \frac{١}{٣}ج - ٢ل$ ، حيث (ل) الارتفاع الابتدائي، (ج) التسارع الناتج عن الجاذبية، فإذا كان تسارع الجاذبية على سطح كوكب المريخ

$٣,٣٧م/ث^٢$ ، وعلى سطح الأرض $٩,٨م/ث^٢$ ، وسقط الجسم من ارتفاع ابتدائي مقداره ١٢٠ مترًا فوق سطح كل من الكوكبين، فأجب عن السؤالين الآتيين:

(أ) أي الكوكبين يصل الجسم إلى سطحه أولاً؟

(ب) كم يستغرق الجسم للوصول إلى سطح كل من الكوكبين مقربًا الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة؟

(٢٨) أوجد قيمة جـ التي تجعل كل ثلاثية الحدود: $س^٢ + جـس + ٢٢٥$ مربعًا كاملاً.



(٢٩) **رسم:** إذا كان لدى أحمد إطار طوله ٦٠ بوصة، وعرضه ٤ بوصات، ويرغب في زيادة بُعدي الإطار على أن تكون الزيادة في الطول تعادل ١٠ أمثال الزيادة في العرض؛ لتناسب قطعة قماش مساحتها ٤٨٠ بوصة مربعة. فما بُعد الإطار الجديد؟

(٣٠) **تمثيلات متعددة:** سوف تستكشف في هذه المسألة خاصية للمعادلات التربيعية.

(أ) **جدولياً:** انسخ الجدول المجاور وأكمل العمود الثاني.

عدد الجذور	ب ^٢ - ٤أ	ثلاثية الحدود
١	٠	س ^٢ - ٨س + ١٦
		س ^٢ - ١١س + ٣
		س ^٢ - ٦س + ٩
		س ^٢ - ٢س + ٧
		س ^٢ + ١٠س + ٢٥
		س ^٢ - ٣س + ١٢

(ب) **جبرياً:** اكتب كل ثلاثية حدود على صورة معادلة طرفها الأيمن يساوي صفراً، وحلّها بإكمال المربع، وأكمل العمود الثالث في الجدول بكتابة عدد جذور كل معادلة.

(ج) **لفظياً:** قارن عدد الجذور لكل معادلة بالنتيجة في العمود ب^٢ - ٤أ، وهل هناك علاقة بينهما؟ وإن كانت هناك علاقة فصفها.

(د) **تحليلياً:** تنبأ بعدد حلول س^٢ - ٩س - ١٥ = ٠، وتحقق من صحة تنبؤك بحل المعادلة.

مسائل مهارات التفكير العليا

(٣١) **تحذّر:** اشتق معادلة محور التماثل بإكمال المربع للمعادلة ص = أس^٢ + ب س + ج، أ ≠ ٠، وأعد كتابة المعادلة على الصورة ص = أ(س - هـ) + ك.

(٣٢) **تبرير:** حدّد عدد حلول المعادلة س^٢ + ب س = ج إذا كانت ج > - (ب/٤). فسر إجابتك.

(٣٣) حدّد العبارة التي تختلف عن العبارات الثلاث الأخرى. وفسر إجابتك.

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$$

(٣٤) **مسألة مفتوحة:** اكتب معادلة تربيعية حلها الوحيد هو ٤.

(٣٥) **اكتب:** قارن بين الطرق الآتية: إكمال المربع، التمثيل البياني، التحليل للعوامل التي تُستعمل لحل المعادلة: س^٢ - ٥س - ٧ = ٠

تدريب على اختبار

(٣٧) **إجابة قصيرة:** يمكن تمثيل عدد سكان إحدى المدن بالمعادلة ص = ٢٢٠٠٠ + ١٢٠٠ن، حيث (ص) عدد السكان، (ن) عدد السنوات بعد عام ١٤٣٨ هـ، ما عدد السنوات اللازمة بعد عام ١٤٣٨ هـ ليصبح عدد سكانها ٢٨٠٠٠ نسمة؟

(٣٦) إذا كان طول مستطيل يساوي ثلاثة أمثاله عرضه ومساحته ٧٥ سنتيمتراً مربعاً، فما طوله؟

(ج) ١٠ سم

(أ) ٢٥ سم

(د) ٥ سم

(ب) ١٥ سم



مراجعة تراكمية

اكتب كلاً مما يأتي في أبسط صورة، مفترضاً أن المقام لا يساوي صفراً: (مهارة سابقة)

$$\frac{ج^3}{ج^2} \quad (٤٠)$$

$$\frac{٧٤}{٥٤} \quad (٣٩)$$

$$\frac{٦٤}{٣٤} \quad (٣٨)$$

حل كلاً من المتباينات الآتية: (مهارة سابقة)

$$١٣ \geq |٢ - ب| \quad (٤٢)$$

$$٨ \leq |٢ - ٣| \quad (٤١)$$

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

احسب قيمة $\sqrt{ب^2 - ٤}$ أ ج في كلٍّ من الحالات الآتية:

$$(٤٤) \quad أ = ١، ب = ١٢، ج = ١١$$

$$(٤٣) \quad أ = ٢، ب = ٥، ج = ٢$$

$$(٤٦) \quad أ = ٣، ب = ١، ج = ٢$$

$$(٤٥) \quad أ = ٢، ب = ٤، ج = ٦$$





حل المعادلات التربيعية باستعمال القانون العام

لماذا؟



يمكن تمثيل ضغط الدم الانقباضي الطبيعي (ص) بالملتر زئبق للأثني البالغة بالدالة: ص = ٠,٠١ س + ٠,٠٥ س + ٠,٠٧، حيث (س) العمر بالسنوات، وتستعمل هذه الدالة لتقدير عمر الأثني إذا عُلِمَ ضغط الدم الانقباضي لها، إلا أنه من الصعب حل المعادلة المرافقة لها بالتحليل إلى العوامل أو التمثيل البياني، أو إكمال المربع.

القانون العام: ينتج عن إكمال المربع للمعادلة التربيعية $أس^٢ + ب س + ج = ٠$ ، صيغة نستعملها لحل أية معادلة تربيعية مكتوبة بالصيغة القياسية، وتُسمى هذه الصيغة **القانون العام**.

فيما سبق

درست حل معادلات تربيعية بإكمال المربع.

والآن

- أحل معادلات تربيعية باستعمال القانون العام.
- أستعمل المميز لتحديد عدد حلول معادلة تربيعية.

المفردات

القانون العام
المميز

أضف إلى

مطوياتك

القانون العام

مفهوم أساسي

حل المعادلة التربيعية: $أس^٢ + ب س + ج = ٠$ ، حيث $أ \neq ٠$ ، يُعبر عنه بالقانون العام:

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أج}}{٢أ}$$

سيطلب إليك اشتقاق هذا القانون لاحقاً (في الدرس ٩ - ١)

مثال ١

استعمال القانون العام

حل المعادلة: $٣س^٢ + ٥س + ١٢ = ٠$ باستعمال القانون العام.

الخطوة ١: أعد كتابة المعادلة بالصورة القياسية.

$$٣س^٢ + ٥س + ١٢ = ٠$$

$$٣س^٢ + ٥س - ١٢ = ٠$$

الخطوة ٢: طبق القانون العام.

$$س = \frac{-٥ \pm \sqrt{٥^٢ - ٤(٣)(-١٢)}}{٢(٣)}$$

$$= \frac{-٥ \pm \sqrt{٢٥ - ١٤٤}}{٦} = \frac{-٥ \pm \sqrt{-١١٩}}{٦}$$

$$= \frac{-٥ \pm \sqrt{١١٩}}{٦}$$

$$= \frac{-٥ + \sqrt{١١٩}}{٦} \text{ أو } \frac{-٥ - \sqrt{١١٩}}{٦}$$

$$س = \frac{-٥ - \sqrt{١١٩}}{٦} \text{ أو } س = \frac{-٥ + \sqrt{١١٩}}{٦}$$

$$س = -٣ \text{ و } \frac{٤}{٣}$$

الحلان هما -٣ و $\frac{٤}{٣}$.

المعادلة الأصلية

اطرح ١٢ من كلا الطرفين

القانون العام

$$أ = ٣، ب = ٥، ج = -١٢$$

اضرب

اجمع ثم أوجد الجذر التربيعي

افصل الحلين

بسط



تحقق من فهمك

(١) $٢س^٢ + ٩س = ١٨$ (ب) $٤س^٢ - ٢٤س + ٣٥ = ٠$

عند تطبيقك القانون العام لحل المعادلات التربيعية قد تحتاج إلى تقريب بعض حلولها.

استعمال القانون العام

مثال ٢

حلّ المعادلة $١٠س - ٥س = ٢٥$ باستعمال القانون العام، مقرباً الحل إلى أقرب جزء من عشرة إذا كان ذلك ضرورياً:

الخطوة ١: أعد كتابة المعادلة بالصورة القياسية.

$$\begin{aligned} ١٠س - ٥س &= ٢٥ \\ ١٠س^٢ - ٥س - ٢٥ &= ٠ \end{aligned}$$

الخطوة ٢: طبق القانون العام.

$$س = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

القانون العام

$ا = ١٠, ب = -٥, ج = -٢٥$

اضرب ثم اجمع

افصل الحلين

بسط

$$\frac{1025 \pm 5}{20} = \frac{1000 + 25 \pm 5}{20} =$$

$$\frac{1025 \pm 5}{20} = س \quad \text{أو} \quad \frac{1025 \pm 5}{20} =$$

$$١,٩ \approx \quad \quad \quad ١,٤ \approx$$

الحلان هما $١,٤$ و $١,٩$ تقريباً.

تحقق من فهمك

(٢) $٣س^٢ - ٢س - ٩ = ٠$

يمكنك استعمال طرق مختلفة لحل المعادلات التربيعية. ولا توجد طريقة هي الأفضل دائماً لحل أي مسألة.

حلّ المعادلات التربيعية باستعمال طرق مختلفة

مثال ٣

حل المعادلة: $س^٢ - ٤س = ١٢$.

الطريقة ١: التمثيل البياني

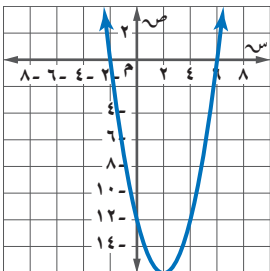
أعد كتابة المعادلة بالصورة القياسية.

$$س^٢ - ٤س = ١٢$$

$$س^٢ - ٤س - ١٢ = ٠$$

مثّل الدالة المرتبطة $(س) = س^٢ - ٤س - ١٢$ بيانياً، وحدّد المقطعين السينيين على التمثيل.

الحلان هما $-٢, ٦$.



المعادلة الأصلية

اطرح ١٢ من كلا الطرفين

إرشادات للاختبار

الإجابات الدقيقة

العدد ١٠٢٥ في المثال ٢ غير نسبي؛ لذا فالآلة الحاسبة تعطي فقط قيمة تقريبية له، أما الإجابة الدقيقة في المثال ٢ فهي: $\frac{1025 \pm 5}{20}$ أما العدان $-١,٤$ و $١,٩$ فقيمتان تقريبيتان.

الطريقة ٢ : التحليل إلى عوامل

$$\begin{aligned} \text{المعادلة الأصلية} & \quad \text{س}^2 - ٤\text{س} = ١٢ \\ \text{اطرح ١٢ من كلا الطرفين} & \quad \text{س}^2 - ٤\text{س} - ١٢ = ٠ \\ \text{حلّل} & \quad (\text{س} - ٦)(\text{س} + ٢) = ٠ \\ \text{خاصية الضرب الصفري} & \quad \text{س} - ٦ = ٠ \text{ أو } \text{س} + ٢ = ٠ \\ \text{إيجاد قيم س} & \quad \text{س} = ٦ \quad \text{س} = -٢ \end{aligned}$$

الطريقة ٣ : إكمال المربع

المعادلة مكتوبة بالصورة المناسبة لإكمال المربع؛ لأن المعامل الرئيس يساوي ١، والحددين اللذين يحتويان س^٢، س تم فصلهما.

$$\begin{aligned} \text{المعادلة الأصلية} & \quad \text{س}^2 - ٤\text{س} = ١٢ \\ \text{بما أن } \left(\frac{-٤}{٢}\right)^2 = ٤, \text{ لذا أضف ٤ إلى كلا الطرفين} & \quad \text{س}^2 - ٤\text{س} + ٤ = ١٢ + ٤ \\ \text{حلّل س}^2 - ٤\text{س} + ٤ & \quad (\text{س} - ٢)^2 = ١٦ \\ \text{أوجد الجذر التربيعي لكلا الطرفين} & \quad \text{س} - ٢ = \pm ٤ \\ \text{أضف ٢ لكلا الطرفين} & \quad \text{س} = \pm ٢ + ٢ \\ \text{افصل الحلين} & \quad \text{س} = ٢ + ٢ \text{ أو } \text{س} = ٢ - ٤ \\ \text{بسّط} & \quad \text{س} = ٤ \quad \text{س} = -٢ \end{aligned}$$

الطريقة ٤ : القانون العام

من الطريقة الأولى، الصورة القياسية للمعادلة هي: $\text{س}^2 - ٤\text{س} - ١٢ = ٠$.

$$\begin{aligned} \text{القانون العام} & \quad \text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^2 - ٤\text{أج}}}{٢\text{أ}} \\ \text{أ} = ١, \text{ ب} = -٤, \text{ ج} = -١٢ & \quad \text{س} = \frac{-(-٤) \pm \sqrt{(-٤)^2 - ٤(١)(-١٢)}}{٢(١)} \\ \text{اضرب} & \quad \text{س} = \frac{٤ \pm \sqrt{١٦ + ٤٨}}{٢} \\ \text{اجمع وبسّط} & \quad \frac{٨ \pm ٨}{٢} = \frac{١٦ \pm ٨}{٢} \\ \text{افصل الحلين} & \quad \text{س} = \frac{٨ + ٨}{٢} \text{ أو } \text{س} = \frac{٨ - ٨}{٢} \\ \text{بسّط} & \quad \text{س} = ٨ \quad \text{س} = ٠ \end{aligned}$$

تحقق من فهمك

$$\text{٣ب) } \text{س}^2 - ٤\text{س} - ١١ = ٠$$

$$\text{١٣) } ٢\text{س}^2 - ١٧\text{س} + ٨ = ٠$$

تنبيه !

الحلول

لا يُعدّ نوع الطريقة المستعملة لحل المعادلة التربيعية مهمًّا، إذ إن جميع الطرق تُعطي الحل نفسه أو الحلول نفسها.

ويمكنك تلخيص طرق حل المعادلات التربيعية في ملخص المفهوم الآتي :

ملخص المفهوم	حل المعادلات التربيعية	أضف إلى مطوبتك
الطريقة	متى يُفضل استعمالها؟	
التحليل إلى عوامل	تستعمل إذا كان الحد الثابت صفرًا، أو إذا كان من السهل تحديد العوامل فليست جميع المعادلات قابلة للتحليل.	
التمثيل البياني	تستعمل عندما يكون الحل التقريبي مقبولًا.	
استعمال خاصية الجذر التربيعي	تستعمل إذا كانت المعادلة مكتوبة على الصورة $س^2 = ن$ أو $س^2 = (س-هـ)$	
إكمال المربع	يمكن استعمالها لأية معادلة على الصورة: $أس^2 + ب س + ج = ٠$ ، إلا أنه من الأسهل استعمالها إذا كان $ب$ عددًا زوجيًا و $أ = ١$.	
القانون العام	يمكن استعمالها لأية معادلة على الصورة: $أس^2 + ب س + ج = ٠$.	

المميز: في القانون العام، تُسمى العبارة التي تحت الجذر $(ب^2 - ٤ أ ج)$ **المميز**، ويمكنك استعماله لتحديد عدد الحلول الحقيقية للمعادلة التربيعية.

مفهوم أساسي	استعمال المميز	أضف إلى مطوبتك
المعادلة	$س^2 + ٢س + ٥ = ٠$	$س^2 - ٢س + ٧ = ٠$
المميز	$ب^2 - ٤ أ ج = ١٦ - ٤ = ١٢$	$ب^2 - ٤ أ ج = ٤ - ٤ = ٠$
تمثيل الدالة المرتبطة		
عدد المقاطع السينية	٠	١
عدد الحلول الحقيقية	٠	١

استعمال المميز

مثال ٤

أوجد قيمة المميز للمعادلة: $س^2 - ٤س + ٥ = ٣$ ، ثم حدّد عدد حلولها الحقيقية.

الخطوة ١: أعد كتابة المعادلة بالصورة القياسية: $س^2 - ٤س + ٥ = ٣$ ← $س^2 - ٤س + ٢ = ٠$

الخطوة ٢: أوجد المميز.

$$ب^2 - ٤ أ ج = (-٤)^2 - ٤(٢) = ١٦ - ٨ = ٨$$

بما أن المميز سالب فالمعادلة ليس لها حلول حقيقية.

تحقق من فهمك

$$١٤ أ) س^2 + ١١س + ١٥ = ٠ \quad ٤ ب) س^2 - ٩س + ٣٠ = ٠$$

إرشادات للدراسة

المميز:

تذكر أنه إذا كان الطرف الأيمن في الصورة القياسية لثلاثي حدود من الدرجة الثانية مربعًا كاملاً فهناك حل واحد، ويكون المميز صفرًا.

المثالان ٢، ١

حلّ كل معادلة فيما يأتي باستعمال القانون العام مقرباً الحل إلى أقرب جزء من عشرة إذا كان ذلك ضرورياً:

$$(١) \text{ س } ٢ - \text{ س } ٢ - ١٥ = ٠ \quad (٢) \text{ س } ٢ - ٨ = ١٠ \quad (٣) \text{ س } ٥ + ٥ = ١٣ - \text{ س}$$

مثال ٣

حلّ كل معادلة فيما يأتي، واذكر الطريقة التي استعملتها:

$$(٤) \text{ س } ٢ + ١١ - \text{ س } ٦ = ٠ \quad (٥) \text{ س } ٢ - ٣ - \text{ س } ٦ = ٠ \quad (٦) \text{ س } ٩ - ٢ = ٢٥$$

مثال ٤

أوجد قيمة المميز لكل معادلة فيما يأتي، ثم حدّد عدد حلولها الحقيقية:

$$(٧) \text{ س } ٩ - ٢ = ٢١ + ٠ \quad (٨) \text{ س } ٩ + ٢ = ٢٤ - \text{ س } ١٦ \quad (٩) \text{ س } ٣ - ٢ = ٨$$

(١٠) **منصة القفز:** يقفز خالد من فوق منصة القفز، حيث تمثل المعادلة $١٦ - ٤ + ٢ = ٦$ ارتفاع خالد (ل) بعد (ن) من الثواني، استعمل المميز لتحديد ما إذا كان خالد سيصل إلى ارتفاع ٢٠ قدمًا. فسّر إجابتك.

تدرب وحل المسائل

المثالان ٢، ١

حلّ كل معادلة فيما يأتي باستعمال القانون العام مقرباً الحل إلى أقرب جزء من عشرة إذا كان ذلك ضرورياً:

$$(١١) \text{ س } ٤ + ٥ - \text{ س } ٦ = ٠ \quad (١٢) \text{ س } ٢ + ١٦ = ٠ \quad (١٣) \text{ س } ٦ - ٢ = ١٢ + \text{ س } ١ = ٠$$

$$(١٤) \text{ س } ٥ - ٨ = ٦ \quad (١٥) \text{ س } ٥ + ٢ = ٢١ - \text{ س } ١٨ \quad (١٦) \text{ س } ٢ = ١٢ - \text{ س } ١٨$$

مثال ٣

حلّ كل معادلة فيما يأتي، واذكر الطريقة التي استعملتها:

$$(١٧) \text{ س } ٢ - ٨ = ١٢ \quad (١٨) \text{ س } ٣ - ٢ = ٢٤ - \text{ س } ٣٦ \quad (١٩) \text{ س } ٣ - ٢ = ١٠$$

مثال ٤

أوجد قيمة المميز لكل معادلة فيما يأتي، ثم حدّد عدد حلولها الحقيقية:

$$(٢٠) \text{ س } ٢ - \frac{٤}{٥} = ٣ \quad (٢١) \text{ س } ٥ - ٢ = ٢ - \text{ س } ٢ \quad (٢٢) \text{ س } ٥ - ٢ = ١٠ + \text{ س } ٩ = ٢٠$$



الربط بالحياة

من أسباب الحوادث المرورية: القيادة في أثناء التعب والإرهاق، الانشغال عن القيادة، عدم التقيد بأنظمة المرور، التهور في القيادة، وعدم ربط حزام الأمان وغيرها؛ حيث بلغ عدد ضحايا الحوادث المرورية في عام ٢٠٢٠ م ٤٦١٨ شخصاً.



(٢٣) **مرور:** تمثل المعادلة $٠٠٧ + ٢٠٠ = ١٩ + ٠$ المسافة (ف) بالأمطار التي تقطعها سيارة تسير بسرعة (ع) كلم/ ساعة للتوقف تمامًا بعد استعمال المكابح، فإذا كانت حدود السرعة القصوى في أحد الشوارع ٨٠ كلم/ ساعة، وتوقفت سيارة منذر بعد ٥٥ مترًا من استعماله المكابح، فهل كانت سرعته تزيد على السرعة القصوى؟ فسّر تبريرك.

(٢٤) **إعلان:** يعدّ راشد ملصقًا للإعلان عن رحلة عمرة، ويريد أن يغطي جزءًا من المساحة بنصوص كتابية.

(أ) اكتب معادلة لمساحة القسم النصّي.

(ب) حلّ المعادلة باستعمال القانون العام.

(ج) كم يجب أن تكون هوامش الملصق؟

حدّد دون استعمال التمثيل البياني عدد المقاطع السينية لكل دالة فيما يأتي:

(٢٥) $٤, ٢٥$ س $٣ - ٣ = ٣$ س ٢ س $٢ = \frac{٣}{٥} + \frac{٢}{٥}$ س (٢٦) $٢٥, ٢٥$ س ٠ س ٢ س $١ = ١$ س (٢٧)

حلّ كل معادلة فيما يأتي باستعمال القانون العام مقرباً الناتج إلى أقرب جزء من عشرة إذا كان ذلك ضرورياً:

(٢٨) $٢ - ٢$ س $٧ - ٥ = ١$ س (٢٩) $٢, ٣$ س $٢ - ٤$ س $١, ٨$ س ٣٠ س $٢ - ٥ = ٥$ س

(٣١) **تمثيلات متعددة:** سوف تكتشف الدوال الأسية في هذه المسألة:

(أ) جدولياً: انسخ الجدول الآتي وأكمّله:

الزمن (ساعة)	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦
عدد البكتيريا	$١ = ٢$	$٢ = ١$	$٢ = ٢$				

(ب) بيانياً: مثّل المعلومات المعطاة في الجدول بيانياً باستعمال النقاط (الزمن، عدد البكتيريا)، وهل التمثيل خطي أم تربيعي أم غير ذلك؟

(ج) تحليلياً: ماذا يحدث لعدد البكتيريا كل ساعة؟ اكتب دالة تمثّل هذا النمط.

مسائل مهارات التفكير العليا

(٣٢) **تحّد:** أوجد جميع قيم ك التي تجعل للمعادلة: $٢٣ - ٢$ س $٣ - ٥$ س $٠ = ٥$ " حلين حقيقيين.

تبرير: بين فيما إذا كان عدد الحلول الحقيقية لكل مما يأتي حلان، أو حل واحد، أو لا يوجد حل:

(٣٣) التمثيل البياني لدالة تربيعية لا تحتوي على مقطع سيني.

(٣٤) التمثيل البياني لدالة تربيعية تمس محور السينات.

(٣٥) التمثيل البياني لدالة تربيعية تقطع محور السينات مرتين.

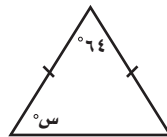
(٣٦) قيمتا كل من أ، ب أكبر من صفر، وقيمة جـ أصغر من صفر في الصيغة القياسية للدالة التربيعية.

(٣٧) **مسألة مفتوحة:** اكتب ٣ دوال تربيعية على أن يكون مميز الأولى موجب، ومميز الثانية سالباً، ومميز الثالثة صفراً.

(٣٨) **اكتب:** وضح طرق حل المعادلات التربيعية، وأعطِ مثلاً مختلفاً لكل طريقة. فسّر إجابتك.

تدريب على اختبار

(٣٩) **إجابة قصيرة:** إذا علمت أن المثلث المجاور متطابق الضلعين، فما قيمة س؟



(٤٠) ما حلول المعادلة التربيعية $٦٢ - ٦$ س $٦ = ٧٢$ ؟

(أ) ٣ أو ٤ (ب) لا يوجد حلول حقيقية

(ب) ٣ أو ٤ (د) ١٢ أو ٤٨

مراجعة تراكمية

حلّ كل معادلة فيما يأتي بإكمال المربع مقربًا الحل إلى أقرب جزء من عشرة إذا كان ذلك ضروريًا: (الدرس ٨-٣)

$$(٤١) \quad ٦س^٢ - ١٧س + ١٢ = ٠ \quad (٤٢) \quad ٩س^٢ - ١٢س = ٠ \quad (٤٣) \quad ٤س^٢ = ٢٠س - ٢٥$$

لتكن $ص = ٢س - ٥س + ٤$. (الدرس ٨-١)

(٤٤) اكتب معادلة محور التماثل.

(٤٥) أوجد إحداثيات نقطة الرأس، وهل هي نقطة عظمى أم صغرى؟

(٤٦) مثل الدالة بيانيًا.

(٤٧) حدّد مجال الدالة ومداهها.

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

أوجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي:

$$(٥٠) \quad \sqrt{٠,٠١٢}$$

$$(٥٣) \quad \sqrt{٨١٢}$$

$$(٤٩) \quad \sqrt{\frac{٩}{١٦}}$$

$$(٥٢) \quad \frac{٢}{\sqrt{١٦}}$$

$$(٤٨) \quad \sqrt{١٠٠٢}$$

$$(٥١) \quad \frac{\sqrt{٤}}{٣}$$



(١٣) **كرة سلة:** سدّد نواف كرة السلة نحو المرمى، وفق المعادلة $ع = ١٦ن^٢ + ٦٠ن + ٣٠$ ، حيث تمثّل (ع) ارتفاع الكرة بعد (ن) ثانية، كم تبقى الكرة في الهواء؟

(١٤) مثّل الدالة: $ص = ٣س^٢$ بيانيًا، وأوجد المقطع الصادي، وحدد مجالها ومداها.

(١٥) **اختيار من متعدد:** أي مما يلي يُعدّ تحليلًا تامًّا للعبارة

٤ س $٨ - ١٢س - ١٢$ إلى عواملها؟

(أ) ٤ (س-٣) (س+١)

(ب) ٤ (س+١٢) (س-١)

(ج) ٤ (س+٣) (س-١)

(د) ٤ (س-٣) (س+٤)

(١٦) أوجد مساحة المستطيل أدناه.



(١٧) مثّل مجموعة الأزواج المرتبة الآتية بيانيًا:

$\{(٤, ٢), (١, ١), (٠, ٠), (١, -١), (٤, -٢)\}$ ، وحدّد فيما

إذا كانت تمثّل دالة خطية أم تربيعية.

(١٨) ابحث عن النمط في الجدول الآتي لتحديد أفضل نموذج دالة

لوصف البيانات: خطية أم تربيعية. فسّر إجابتك.

س	٠	١	٢	٣	٤
ص	١	٣	٥	٧	٩

استعمل جدول القيم لتمثيل الدالتين الآتيتين بيانيًا، وحدّد مجالهما ومداهما:

(١) $ص = ٢س^٢ + ٢س + ٥$ (٢) $ص = ٢س^٢ - ٣س + ١$

لتكن الدالة $ص = ٢س^٢ - ٧س + ٦$.

(٣) حدّد إذا كان للدالة قيمة عظمى أم قيمة صغرى.

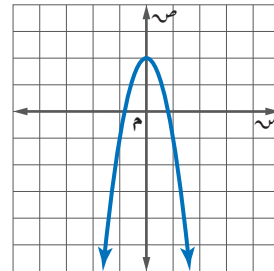
(٤) أوجد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى للدالة.

(٥) حدد مجال الدالة ومداها.

حلّ كل من المعادلتين الآتيتين بيانيًا، وإذا لم تكن الجذور أعدادًا صحيحة فقدرها إلى أقرب جزء من عشرة:

(٦) $٢س + ٧س + ١٠ = ٠$ (٧) $٢س - ٥ = ٣س$

(٨) **اختيار من متعدد:** أيّ المعادلات الآتية تعبّر عن الدالة الممثلة بيانيًا أدناه؟



(أ) $ص = ٣س^٢ - ٢$ (ج) $ص = ٢س^٢ + ٢$

(ب) $ص = ٣س^٢ + ١$ (د) $ص = ٣س^٢ - ٢ + ٢$

حلّ كل من المعادلتين الآتيتين باستعمال إكمال المربع:

(٩) $٢س - ٦ = ٠$ (١٠) $٢س^٢ - ٣٦ = ٦س$

حلّ كل من المعادلتين الآتيتين باستعمال القانون العام، مقربًا الحل إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

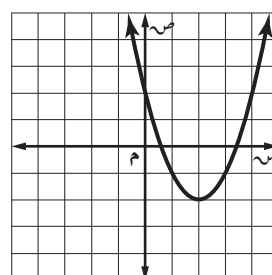
(١١) $٢س - ٣٠ = ٠$ (١٢) $٢س^٢ + ١٥س = ٠$



اختيار من متعدد

اقرأ كل سؤال مما يأتي، ثم اختر رمز الإجابة الصحيحة :

(١) ما إحداثيا رأس القطع المكافئ الممثل أدناه؟



(أ) (٢، ٢) (ب) (٢، -٢)

(ج) (-٢، ٢) (د) (٢، -٢)

(٢) اكتب معادلة المستقيم الذي ميله $\frac{9}{10}$ ومقطعه الصادي ٣ بصيغة الميل والمقطع.

(أ) $ص = ٣س + \frac{9}{10}$

(ب) $ص = \frac{9}{10}س + ٣$

(ج) $ص = \frac{9}{10}س - ٣$

(د) $ص = ٣س - \frac{9}{10}$

(٣) إذا كانت مساحة المستطيل أدناه هي $٣س^٢ + ٩س - ١٤$ وحدة مربعة، فكم وحدة عرضه؟

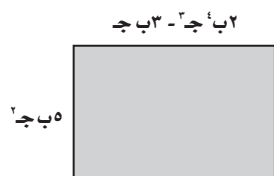


٢س + ٣

(أ) $٧س + ٢$ (ب) $٧س - ٢$

(ج) $٢س + ٢$ (د) $٢س - ٢$

(٤) اكتب عبارة تمثل مساحة المستطيل أدناه.



(أ) $١٠ب ج٢ - ٣ب ج$

(ب) $١٠ب ج٢ - ١٥ب ج٢$

(ج) $٢ب ج٢ - ٣ب ج٢$

(د) $١٠ب ج٢ - ١٥ب ج٢$

(٥) حل المعادلة التربيعية: $س^٢ - ٢س - ١٥ = ٠$

(أ) ١، -٤

(ب) ٣، -٥

(ج) ٣، -٥

(د) $\emptyset$

(٦) ما قيمة ر التي تجعل ميل المستقيم المار بالنقطتين $(٨، -٤)$ ، $(١٢، ر)$ يساوي $\frac{٤}{٣}$ ؟

(أ) -٤

(ب) -١

(ج) ٢

(د) ٣



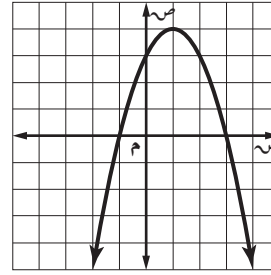
إجابة قصيرة

أجب عن الأسئلة الآتية:

(٧) استعمل القانون العام لحل المعادلة التربيعية:

$$٢س^٢ - ٦س + ٣ = ٠$$

(٨) استعمل التمثيل البياني الآتي للمعادلة التربيعية للإجابة عن الأسئلة أدناه.



(أ) ما إحداثي الرأس؟

(ب) ما إحداثيا نقطة التقاطع مع المحور الصادي؟

(ج) ما معادلة محور التماثل؟

(٩) ثمن ٥ دفاتر و ٣ أقلام ٥, ١٩ ريالاً، وثمن ٤ دفاتر و ٦ أقلام ٢١ ريالاً، استعمل هذه المعطيات في الإجابة عما يأتي:

(أ) اكتب نظاماً من المعادلات يمثل هذا الموقف.

(ب) حل نظام المعادلات، ما ثمن كلٍّ من الدفتر والقلم؟

(١٠) يبين الجدول الآتي الأجرة الكلية لقارب مدة (ن) ساعة.

عدد الساعات (ن)	الأجرة الكلية (ج)
١	٤٥ ريالاً
٢	٧٠ ريالاً
٣	٩٥ ريالاً
٤	١٢٠ ريالاً

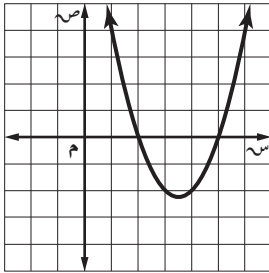
(أ) اكتب دالة تمثل هذا الموقف.

(ب) ما أجرة القارب مدة ٧ ساعات؟

إجابة مطولة

أجب عن السؤال الآتي موضحاً خطوات الحل:

(١١) استعمل الدالة وتمثيلها البياني للإجابة عن الأسئلة الآتية:



(أ) حلّ العبارة $٢س - ٧س + ١٠ = ٠$ إلى عواملها الأولية.

(ب) ما حلّ المعادلة: $٢س - ٧س + ١٠ = ٠$ ؟

(ج) ماذا تلاحظ على التمثيل البياني للدالة التربيعية؟ وأين يقطع تمثيلها محور السينات؟ وما العلاقة بين هذه القيم وحل المعادلة $٢س - ٧س + ١٠ = ٠$ ؟ فسّر إجابتك.

للمساعدة ..

١١	١٠	٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١	إذا لم تجب عن السؤال
مهارة سابقة	مهارة سابقة	مهارة سابقة	١-٨	٤-٨	مهارة سابقة	٤-٨	مهارة سابقة	مهارة سابقة	مهارة سابقة	١-٨	فراجع الدرس ..

المعادلات الجذرية والمثلثات

فيما سبق

درستُ حل المعادلات التربيعية.

والآن

- أبسط عبارات جذرية وأجمعها، وأطرحها، وأضربها.
- أحل معادلات جذرية.
- أستعمل نظرية فيثاغورس.
- أجد النسب المثلثية.

لماذا؟

 **المحيطات:** يتكون التسونامي أو الموجات العالية من هزات أرضية تحت البحر. ويمكن استعمال معادلة جذرية لإيجاد سرعة التسونامي بالمتري لكل ثانية أو عمق المحيط بالأمتار.

المفردات:

- إنطاق المقام ص (٤٨)
- المعادلات الجذرية ص (٥٨)
- الحلول الدخيلة ص (٥٩)
- النسب المثلثية ص (٧٩)

منظم أفكار

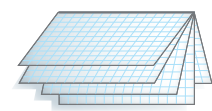
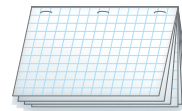
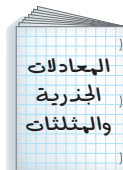
المطويات

المعادلات الجذرية والمثلثات: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظتك حول المعادلات الجذرية والمثلثات مبتدئاً بأربع أوراق مربعات.

٣ **سم** غلاف المطوية بعنوان الفصل، ثم اكتب كذلك عنوان كل درس في الفصل على كل صفحة من صفحاتها بدءاً من اليمين.

٢ **ثبّت** الأوراق معاً عند خط الطي.

١ **اطو** الأوراق من المنتصف عرضياً.





التهيئة للفصل ٩

أجب عن الاختبار الآتي. انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

مراجعة سريعة

مثال ١

أوجد الجذر التربيعي للعدد ٥٠ مقرباً الجواب إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم الأمر.

استعمل الحاسبة $7,071067812... \approx \sqrt{50}$
وإلى أقرب جزء من مئة $\sqrt{50} \approx 7,07$.

اختبار سريع

أوجد الجذر التربيعي لكل ممّا يأتي، مقرباً الجواب إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم الأمر: (مهارة سابقة)

$$\begin{array}{ll} (1) \sqrt{82} & (2) \sqrt{26} \\ (3) \sqrt{15} & (4) \sqrt{99} \end{array}$$

(٥) صندوق الرمل: إذا صنع إسحاق صندوقاً رملياً قاعدته مربعة الشكل مساحتها ١٠٠ قدم مربعة. فما طول ضلع قاعدة الصندوق؟

مثال ٢

بسّط العبارة: ٣س + ٧ص - ٤س - ٨ص

٣س + ٧ص - ٤س - ٨ص = -٥ص + ٣س
العبارة الأصلية
اجمع الحدود المتشابهة
بسّط
== س - ص

بسّط كل عبارة فيما يأتي: (مهارة سابقة)

$$\begin{array}{l} (6) (21س + 15ص) - (9س - 4ص) \\ (7) 13س - 5ص + 2ص \\ (8) (10أ - 5ب) + (6أ + 5ب) \\ (9) 6م + 5ن + 4م - 3ن - 2م + 6 \end{array}$$

مثال ٣

حلّ المعادلة: ٢س - ٥س + ٦ = ٠

٢س - ٥س + ٦ = ٠
المعادلة الأصلية
حلّ إلى العوامل
خاصية الضرب الصفري
حل كل معادلة
٢س = ٣
٣ = س

حلّ كل معادلة فيما يأتي: (الدرسان ٨ - ٣ - ٨ - ٤)

$$(10) 2س - 4س = ٠$$

$$(11) 2س + 7س - 5 = ١$$

(١٢) هندسة: إذا كانت مساحة

المستطيل المجاور ٩٠ سم^٢،
فما قيمة س؟

س - ١

مثال ٤

استعمل الضرب التبادلي لتحديد إذا كانت النسبتان $\frac{8}{12}$ و $\frac{2}{3}$ تشكّلان تناسباً أم لا.

$\frac{8}{12} \stackrel{?}{=} \frac{2}{3}$
اكتب المعادلة
اضرب تبادلياً
بسّط
 $24 = 24$
لذا، فهما تشكّلان تناسباً.

استعمل الضرب التبادلي لتحديد إذا كانت النسبتان $\frac{15}{20}$ و $\frac{3}{4}$ تشكّلان تناسباً، واكتب "نعم" أو "لا": (مهارة سابقة)

$$(13) \frac{4}{9}, \frac{2}{3} \quad (14) \frac{15}{20}, \frac{3}{4}$$

(١٥) خرائط: إذا مثّلت مسافة ١٠ كلم ستمتراً واحداً على الخريطة، فما المسافة بين مدينتين على الخريطة إن كانت المسافة بينهما ٥٠ كلم؟



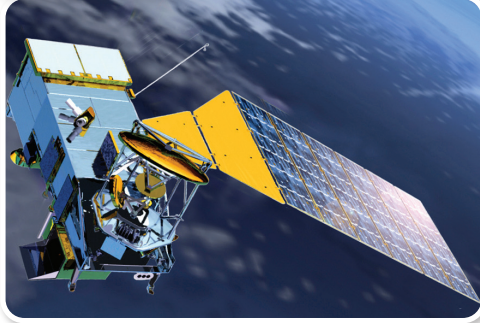
تبسيط العبارات الجذرية

لماذا؟

رابط الدرس الرقمي



www.ien.edu.sa



تؤدي الأقمار الاصطناعية العديد من المهام، منها:
دراسة الكون والتنبؤ بالطقس، والاتصالات بأنواعها،
وتيسير الملاحة البحرية والجوية... إلى غير ذلك، حيث
تدور هذه الأقمار بسرعات محددة في مدارات خاصة
بها حول الأرض، يمكن حسابها بالعلاقة:

$$ع = \sqrt{\frac{١٤١٠ \times ٤}{نق}} \text{ حيث تمثل (ع) السرعة المدارية للقمر}$$

الاصطناعي بوحدة المتر/ ثانية، (نق) نصف قطر المدار ويساوي بعد القمر عن مركز الأرض.

ويذكر أن المملكة العربية السعودية أطلقت منظومة أقمار اصطناعية تجارية صغيرة يصل عددها إلى ٢٤ قمرًا.

خاصية ضرب الجذور التربيعية: تتضمن **العلاقة الجذرية** جذرًا، كالجذر التربيعي مثلاً، وتكون العبارة

الجذرية في أبسط صورة إذا تحققت الشروط التالية في العبارة التي تحت الجذر:

• لا يكون أي من عوامله مربعاً كاملاً عدا ١.

• لا يتضمن كسورًا.

• لا يظهر أي جذر في مقام الكسر.

ويمكنك استعمال الخاصية الآتية لتبسيط الجذور التربيعية.

فيما سبق

درست إيجاد الجذور التربيعية.

والآن

■ استعمل خاصية ضرب الجذور التربيعية في تبسيط العبارات الجذرية.

■ استعمل خاصية قسمة الجذور التربيعية في تبسيط العبارات الجذرية.

المفردات

العبارة الجذرية

إنطاق المقام

المرافق

أضف إلى

مطوياتك

خاصية ضرب الجذور التربيعية

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: الجذر التربيعي للمقدار أ ب لأي عددين حقيقيين غير سالبين أ، ب، الجذر التربيعي للمقدار أ يساوي الجذر التربيعي للمقدار أ مضروباً في الجذر التربيعي للمقدار ب.

$$\sqrt{أ ب} = \sqrt{أ} \times \sqrt{ب} \text{ ، إذا كانت } أ \geq ٠ \text{ ، } ب \geq ٠$$

الرموز:

$$\sqrt{٦} = \sqrt{٣ \times ٢} = \sqrt{٣} \times \sqrt{٢} = \sqrt{٦} \times \sqrt{٤} = ٢ \sqrt{٦}$$

أمثلة:

تبسيط الجذور التربيعية

مثال ١

بسّط العبارة: $\sqrt{٨٠}$.

حلّل ٨٠ إلى عوامله الأولية

خاصية ضرب الجذور

بسّط

$$\sqrt{٨٠} = \sqrt{٥ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢} = ٢ \sqrt{١٠}$$

$$= ٢ \sqrt{٢ \times ٢ \times ٥} = ٢ \times ٢ \sqrt{٥} = ٤ \sqrt{٥}$$

$$= ٤ \sqrt{٥}$$

تحقق من فهمك

$$\sqrt{١٨٠} \text{ (ب)}$$

$$\sqrt{٥٤} \text{ (أ)}$$

ضرب الجذور التربيعية

خاصية ضرب الجذور

$$\overline{V}\sqrt{V} \times \overline{V}\sqrt{V} \times \overline{V}\sqrt{V} = \overline{V}\sqrt{V} \times \overline{V}\sqrt{V}$$

خاصية ضرب الجذور

$$\sqrt{v} \cdot 2 = \sqrt{v} \times \sqrt{4} =$$

۱۷ × ۶ (۲ ب)

$$1\sqrt{} \times 5\sqrt{} \quad (12)$$

$\sqrt{2}$ س = ؟ س

عَوَضٌ عَنْ سِ بـ (۳-)

$$3 - \frac{1}{2} \sqrt{2(3 -)}$$

$$q = r(r-1)$$

$$3 - \sqrt{9}$$

$$r = \sqrt{9}$$

$$3- \neq 3$$

$$|{}^3s| = \sqrt{{}^6s}$$

$$s_2 = \sqrt{s_4}$$

$$\sqrt[n]{|s|} = \sqrt[n]{s}$$

$$|s| = \sqrt[2]{s}$$

تبسيط الجذر التربيعي لمتغيرات

بسط العبارة: $\sqrt{90s^3v^4k^5}$.

$$\sqrt[5]{2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19 \times 23 \times 29 \times 31 \times 37 \times 41 \times 43 \times 47 \times 53 \times 59 \times 61 \times 67 \times 71 \times 73 \times 79 \times 83 \times 89 \times 97} = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19 \times 23 \times 29 \times 31 \times 37 \times 41 \times 43 \times 47 \times 53 \times 59 \times 61 \times 67 \times 71 \times 73 \times 79 \times 83 \times 89 \times 97$$

حلّ إلى العوامل الأولية

$$= \sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{5} \times \sqrt{s} \times \sqrt{s^2} \times \sqrt{s^3} \times \sqrt{s^4} \times \sqrt{s^5}$$

بِسْمِ

$$\overline{\sqrt{ك}} \times \sqrt{ك}^2 \times \sqrt{ص}^2 \times \sqrt{س} \times |س| \times \sqrt{5} \times \sqrt{3} \times \sqrt{2} =$$

بسم

$$= \sqrt[3]{\frac{10}{s^2}} = \sqrt[3]{\frac{10}{100}} = \sqrt[3]{\frac{1}{10}} = \frac{1}{\sqrt[3]{10}}$$



(۳ب) ۵۶/۲ سے ص ۱۰ء

(١٣) $\sqrt[3]{2, 3, 4}$ و ٥

أضف إلى

مطويتك

خاصية قسمة الجذور التربيعية

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: لأي عددين حقيقيين a, b ، حيث $a \leq 0$ ، $b < 0$ ، الجذر التربيعي للمقدار $\frac{a}{b}$ يساوي الجذر التربيعي للبسط a مقسوماً على الجذر التربيعي للمقام b .

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

الرموز:

قراءة الرياضيات

الكسور تحت الجذر

تُقرأ العبارة $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$: الجذر
التربيعي لـ $\frac{a}{b}$ ، أو
الجذر التربيعي للمقدار " $\frac{a}{b}$ "
علم ب "

يمكنك استعمال خصائص الجذر التربيعي **لإنطاق المقام** وكتابته على صورة عدد نسبي إذا كان جذراً، وهذا يتضمن ضرب كل من البسط والمقام في عامل يؤدي إلى حذف الجذر من المقام.

مثال ٤ من اختبار

إرشادات للاختبار

تبسيط:

انظر أولاً إلى ما تحت الجذر إن كان يمكن تبسيطه؛ لأن ذلك يجعل حساباتك أبسط.

أكتب العبارة $\sqrt{\frac{35}{15}}$ في أبسط صورة.

(أ) $\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{15}}$ (ب) $\frac{\sqrt{21}}{3}$ (ج) $\frac{\sqrt{525}}{\sqrt{15}}$ (د) $\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{15}}$

اقرأ الفقرة:

يجب تبسيط العبارة الجذرية.

حل الفقرة:

بسط الكسر

$$\sqrt{\frac{35}{15}} = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{15}}$$

خاصية قسمة الجذور

$$\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{3 \times 5}} = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{3} \sqrt{5}}$$

اضرب في $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$$\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{3} \sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{35} \sqrt{3}}{\sqrt{3} \sqrt{5} \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{105}}{3}$$

خاصية ضرب الجذور

إذن البديل الصحيح هو ب

تحقق من فهمك

(٤) بسط العبارة: $\sqrt{\frac{6}{12}}$

كلٌّ من ثنائيي الحد $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ و $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ جـ $\sqrt{a^2 - b^2}$ تُسمى **مرافقة** للآخرى حيث أ، ب، جـ د أعدادٌ نسبية، فعلى سبيل المثال $2 + \sqrt{7}$ و $2 - \sqrt{7}$ مترافقتان. حاصل ضرب العددين المترافقين هو عدد نسبي، ويمكن إيجاداه باستعمال الفرق بين مربعين.

مثال ٥ استعمال المرافق في إنطاق المقام

بسط العبارة: $\frac{3}{\sqrt{2} + 5}$

مرافق $\sqrt{2} + 5$ هو $\sqrt{2} - 5$

$$\frac{3}{\sqrt{2} + 5} \times \frac{\sqrt{2} - 5}{\sqrt{2} - 5} = \frac{3(\sqrt{2} - 5)}{(\sqrt{2})^2 - 5^2} = \frac{3\sqrt{2} - 15}{2 - 25} = \frac{3\sqrt{2} - 15}{-23} = \frac{15 - 3\sqrt{2}}{23}$$

(أ) $\frac{3}{\sqrt{2} + 2}$ (ب) $\frac{7}{\sqrt{7} - 3}$

تحقق من فهمك

(١٥) $\frac{3}{\sqrt{2} + 2}$



الأمثلة ٣-١

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

- (١) $\sqrt{24}$ (٢) $\sqrt{16} \times 3$ (٣) $\sqrt{25} \times 2$
- (٤) $\sqrt{14} \times \sqrt{10}$ (٥) $\sqrt{18} \times \sqrt{3}$ (٦) $\sqrt{10} \times 4 \times \sqrt{10} \times 3$
- (٧) $\sqrt{60} \times \sqrt{3} \times \sqrt{5}$ (٨) $\sqrt{81 \times 3 \times 2}$ (٩) $\sqrt{99 \times 3 \times 2}$

مثال ٤

(١٠) اختيار من متعدد: بسّط العبارة $\sqrt{\frac{45}{10}}$

- (أ) $\frac{\sqrt{2} \times 5}{10}$ (ب) $\frac{\sqrt{45}}{10}$ (ج) $\frac{\sqrt{50}}{10}$ (د) $\frac{\sqrt{2} \times 3}{2}$

مثال ٥

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

- (١١) $\frac{3}{5\sqrt{3}}$ (١٢) $\frac{5}{6\sqrt{2}}$ (١٣) $\frac{2}{10\sqrt{1}}$
- (١٤) $\frac{1}{12\sqrt{4}}$ (١٥) $\frac{4}{7\sqrt{6}}$ (١٦) $\frac{6}{11\sqrt{5}}$

تدرب وحل المسائل

الأمثلة ٣-١

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

- (١٧) $\sqrt{52}$ (١٨) $\sqrt{56}$ (١٩) $\sqrt{72}$
- (٢٠) $\sqrt{18} \times 3$ (٢١) $\sqrt{243}$ (٢٢) $\sqrt{245}$
- (٢٣) $\sqrt{15} \times \sqrt{5}$ (٢٤) $\sqrt{7} \times 2 \times \sqrt{8} \times 3$ (٢٥) $\sqrt{8} \times 5 \times \sqrt{2} \times 4$
- (٢٦) $\sqrt{25} \times 3$ (٢٧) $\sqrt{81 \times 5}$ (٢٨) $\sqrt{2 \times 8 \times 3}$
- (٢٩) $\sqrt{75 \times 3}$ (٣٠) $\sqrt{66 \times 2 \times 4}$ (٣١) $\sqrt{10 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2}$



الربط مع الحياة

صدر الأمر الملكي في عام ١٣٤٦هـ بإنشاء أول فرقة إطفاء في المملكة في مكة المكرمة ضمن جهاز البلدية، وفي عام ١٣٨٥هـ عُدل مُسمى المديرية العامة للإطفاء إلى المديرية العامة للدفاع المدني.

(٣٢) **مكافحة حرائق:** تمثل سرعة الماء (ع) الذي يُضخ لمكافحة الحرائق بالمعادلة $\sqrt{2} = \text{ف ج}$ ، حيث (ف) أقصى ارتفاع للماء، (ج) تسارع الجاذبية الأرضية (٣٢ قدمًا/ث^٢).

(أ) حلّ المعادلة بالنسبة لـ ف.

(ب) إذا احتاجت إدارة مكافحة الحرائق في الدفاع المدني إلى مضخة لتضخ الماء إلى ارتفاع ٨٠ قدمًا، فهل تفي بحاجتها مضخة تقذف الماء بسرعة ٧٠ قدمًا/ث؟ فسّر إجابتك.

(ج) تريد إدارة مكافحة الحرائق شراء مضخة تضخ الماء إلى ارتفاع ٩٠ قدمًا. فهل المضخة التي تضخ الماء بسرعة ٧٧ قدمًا/ث تحقق حاجة الإدارة؟ فسّر إجابتك.

المثالان ٤ ، ٥ بسّط كل عبارة فيما يأتي:

$$\begin{array}{lll} (٣٣) \sqrt[٤]{\frac{٣٢}{٤}} & (٣٤) \sqrt[٥]{\frac{٢٧}{٥}} & (٣٥) \sqrt[٣]{\frac{٢٨}{٣}} \\ (٣٦) \sqrt[٥]{\frac{٩}{٥}} \times \sqrt[٣]{\frac{٣}{١٦}} & (٣٧) \frac{٩}{٨\sqrt[٣]{٦}} & (٣٨) \frac{٥\sqrt[٣]{٢}}{٣\sqrt[٣]{٣} + ٧\sqrt[٣]{٢}} \end{array}$$

(٣٩) **طاقة حركية:** يمكن تحديد سرعة كرة بالمعادلة: $\sqrt{\frac{٢ق}{ك}} = ع$ ، حيث (ق) تشير إلى الطاقة الحركية للكرة، (ك) كتلة الكرة.

(أ) بسّط المعادلة معتبراً كتلة الكرة ٣ كيلو جرامات.

(ب) إذا كانت سرعة الكرة ٧ أمتار/ ثانية، فما قيمة الطاقة الحركية للكرة بالجول؟

(٤٠) **قفز بالمظلات:** إذا كان الزمن التقريبي (ن) بالثواني اللازم لسقوط جسم من ارتفاع (ل) بالأقدام

يُعطى بالمعادلة: $\sqrt{\frac{ل}{١٦}} = ن$ ، فما الارتفاع الذي سقط منه مظليٌّ إذا كان الزمن قبل فتح المظلة كما هو

موضح بالجدول الآتي:

زمن السقوط	٤	٥	٦	٧
الارتفاع				

مسائل مهارات التفكير العليا

(٤١) **تبرير:** وضح كيف تحل $٢(٢ - س) = ٢(٢ + س)$.

(٤٢) **مسألة مفتوحة:** اكتب ثنائيي حد على الصورة $\sqrt[٣]{٢} + \sqrt[٣]{٢} - \sqrt[٣]{٢} - \sqrt[٣]{٢}$ ثم أوجد ناتج ضربيهما.

(٤٣) **تحديد:** استعمل خاصية قسمة الجذور التربيعية لتشتق القانون العام لحل المعادلة التربيعية من خلال حل المعادلة $أس^٢ + ب س + ج = ٠$ (ابدأ بإكمال المربع).

(٤٤) **اكتب:** ملخصاً تبين فيه كيف تكتب عبارة جذرية في أبسط صورة.

تدريب على اختبار

(٤٦) أيّ العبارات الآتية تكافئ $\sqrt[٣]{١٦٠} س^٢ ص^٥$ ؟

(أ) $\sqrt[٣]{١٦} | س | ص^٢ \sqrt[٣]{١٠}$

(ب) $\sqrt[٣]{١٦٠} | س | ص^٢$

(ج) $\sqrt[٣]{١٠} | س | ص^٢$

(د) $\sqrt[٣]{٤} | س | ص^٢$

(٤٥) **إجابة قصيرة:** دفع أحمد قيمة فاتورة الكهرباء أقل بـ ٢٣ ريالاً مما دفع خالد. وكان مجموع قيمة الفاتورتين ١٠٩ ريالاً. اكتب معادلة يمكن استعمالها لإيجاد قيمة فاتورة خالد.

مراجعة تراكمية

حلّ كل معادلة فيما يأتي باستعمال القانون العام مقَرَّبًا الجواب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر: (الدرس ٨-٤)

$$(٤٩) \quad ١١س - ٢س = ٣$$

$$(٤٨) \quad ٤و + ١٠٠ + ٢و = ٤٠$$

$$(٤٧) \quad ٢ر + ٢٥ = ٠$$

حلّ كل كثيرة حدود فيما يأتي، إن أمكن ذلك، وإلا فاكتب أولية: (مهارة سابقة)

$$(٥٢) \quad ٣س - ٣س - ٩س + ٢٧$$

$$(٥١) \quad ٢٧ - ٢ت$$

$$(٥٠) \quad ٢أ - ٤$$

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة :

حلّ كلّاً من الأعداد التالية إلى عواملها الأولية:

$$(٥٥) \quad ١٨٠$$

$$(٥٤) \quad ٨٨$$

$$(٥٣) \quad ٢٤$$

$$(٥٨) \quad ٩٠$$

$$(٥٧) \quad ٦٠$$

$$(٥٦) \quad ٣١$$





٩-١ الأسس النسبية

درست خصائص الأسس للأعداد الكلية إلا أن بعض الأسس قد تكون أعدادًا نسبية أو كسورًا. ويمكنك في هذا النشاط استعمال الحاسبة لاستكشاف معنى الأسس النسبية.

نشاط

الأسس النسبية

الخطوة ١: احسب قيمة $16^{\frac{1}{2}}$ ثم $16^{\frac{1}{4}}$.

اضغط المفاتيح: $16 \text{ } ^{\wedge} (\div 2) \text{ } \text{enter}$

اضغط المفاتيح: $\text{ctrl} \text{ } x^2 \text{ } 16 \text{ } \text{enter}$

سجّل النتائج في الجدول المجاور.

الخطوة ٢: استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة كل عبارة، ثم سجّل النتائج في جدولك.

لإيجاد الجذور الأخرى غير الجذر التربيعي، اختر دالة $\sqrt[n]{}$ بالضغط

على المفاتيح $\text{ctrl} \text{ } ^{\wedge}$.

(أ) ما الذي تلاحظه في أثناء دراستك الجدول حول قيمة العبارة التي على

الصورة أ؟ $\frac{1}{n}$

(ب) ما الذي تلاحظه حول قيمة العبارة التي على الصورة أ؟ $\frac{m}{n}$

العبارة	القيمة	العبارة	القيمة
$16^{\frac{1}{2}}$	٤	$16^{\frac{1}{4}}$	٢
$25^{\frac{1}{2}}$		$25^{\frac{1}{4}}$	
$64^{\frac{1}{3}}$		$64^{\frac{1}{4}}$	
$125^{\frac{1}{3}}$		$125^{\frac{1}{4}}$	
$216^{\frac{1}{3}}$		$216^{\frac{1}{4}}$	
$81^{\frac{3}{4}}$		$81^{\frac{1}{4}}$	

تمارين

(١) تذكر خاصية قوة القوة لأي عدد حقيقي أ، وأي عددين صحيحين م، ن. $(a^m)^n = a^{mn}$

افترض أن الأسس الكسرية تعامل معاملة أسس الأعداد الكلية، وأوجد قيمة $(\frac{1}{2})^2$

$$(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

خاصية قوة القوة

بسط

$$= \frac{1}{4}$$

لذا، فإن $\frac{1}{2}$ هو عدد مربعه يساوي $\frac{1}{4}$ ؛ لذا فمن الممكن تعريف $\frac{1}{2}$ بـ $\sqrt[2]{\frac{1}{4}}$. استعمل طريقة مشابهة لتعريف $\frac{1}{n}$.

(٢) عرّف $\frac{m}{n}$ بـ $\sqrt[n]{a^m}$. برّر إجابتك.

اكتب كل جذر فيما يأتي على صورة عبارة أسية باستعمال الأسس النسبية، ثم أوجد قيمتها:

$$(4) \sqrt[4]{121}$$

$$(3) \sqrt[3]{36}$$

$$(6) \sqrt[6]{32}$$

$$(5) \sqrt[5]{256}$$

$$(8) \sqrt[8]{1296}$$

$$(7) \sqrt[7]{2187}$$

$$(10) \sqrt[10]{81}$$

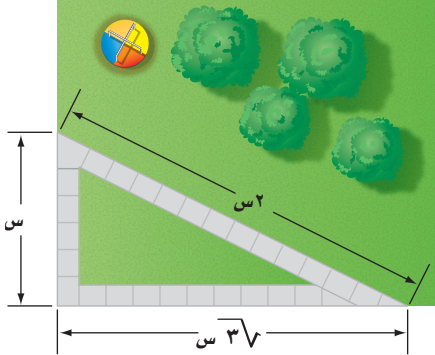
$$(9) \sqrt[9]{16}$$





العمليات على العبارات الجذرية

لماذا؟



يتدرب خالد على الجري في الحديقة، في مسار على صورة مثلث كما في الشكل المجاور؛ استعدادًا للمشاركة في مسابقات الجري، منهياً ثلاث دورات يوميًا. ما المسافة التي يقطعها في دورة الجري الواحدة؟ وما المسافة التي يقطعها يوميًا؟

جمع العبارات الجذرية وطرحها: يجب أن تكون العبارات الجذرية عند جمعها أو طرحها متشابهة مثلها مثل وحيدات الحد.

العبارات الجذرية

$$\sqrt{5}(2+4) = \sqrt{5}2 + \sqrt{5}4$$

$$\sqrt{5}6 =$$

$$\sqrt{3}(2-9) = \sqrt{3}2 - \sqrt{3}9$$

$$\sqrt{3}7 =$$

وحيدات الحد

$$4(2+4) = 4 \times 2 + 4 \times 4$$

$$46 =$$

$$9(2-9) = 9 \times 2 - 9 \times 9$$

$$97 =$$

لاحظ أن ما تحت الجذر لا يتغير عند جمع العبارات الجذرية أو طرحها، ويحدث الشيء نفسه عند جمع وحيدات الحد، إذ تبقى المتغيرات كما هي.

مثال ١ جمع عبارات ماتحت جذورها متشابهة وطرحها

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

$$(أ) \sqrt{2}6 - \sqrt{2}7 + \sqrt{2}5$$

خاصية التوزيع

$$\sqrt{2}(6-7+5) = \sqrt{2}6 - \sqrt{2}7 + \sqrt{2}5$$

بسّط

$$\sqrt{2}6 =$$

$$(ب) \sqrt{11}6 - \sqrt{7}4 + \sqrt{11}5 + \sqrt{7}10$$

خاصية التوزيع

$$\sqrt{11}(6+5) + \sqrt{7}(4+10) = \sqrt{11}6 + \sqrt{11}5 + \sqrt{7}4 + \sqrt{7}10$$

بسّط

$$\sqrt{11}11 - \sqrt{7}14 =$$

تحقق من فهمك



$$(أ) \sqrt{11}9 - \sqrt{11}2 + \sqrt{11}6$$

$$(أ) \sqrt{2}4 + \sqrt{2}5 - \sqrt{2}3$$

$$(أ) \sqrt{7}3 + \sqrt{7}6 - \sqrt{7}3 + \sqrt{7}4$$

$$(أ) \sqrt{3}11 - \sqrt{5}6 + \sqrt{5}14 - \sqrt{3}15$$

بعض العبارات الجذرية لا يكون لها ما تحت الجذر نفسه، وعند تبسيطها قد يكون لها ما تحت الجذر نفسه فيمكنك جمعها أو طرحها.



مثال ٢

جمع عبارات ما تحت جذورها غير متشابه وطرحها

بسط: $\sqrt{72} + \sqrt{32} + \sqrt{18}$

$$\begin{aligned} & (\sqrt{72} \times \sqrt{2}) + (\sqrt{32} \times \sqrt{2}) + (\sqrt{18} \times \sqrt{2}) = \sqrt{72} + \sqrt{32} + \sqrt{18} \\ & \text{خاصية الضرب} \\ & \text{بسط} \\ & \text{اضرب} \\ & \text{بسط} \end{aligned}$$

تحقق من فهمك

$$\begin{aligned} & \text{(أ)} \sqrt{48} + \sqrt{12} - \sqrt{27} \\ & \text{(ب)} \sqrt{48} - \sqrt{12} + \sqrt{27} \\ & \text{(ج)} \sqrt{48} - \sqrt{12} - \sqrt{27} \end{aligned}$$

ضرب العبارات الجذرية: يشبه ضرب العبارات الجذرية ضرب وحيدات الحد.

$$\begin{aligned} & \text{وحيدات الحد} \quad \text{العبارات الجذرية} \\ & (2\sqrt{3})(3\sqrt{2}) = 2 \times 3 \times \sqrt{3} \times \sqrt{2} = 6\sqrt{6} \\ & (2\sqrt{3})(3\sqrt{2}) = 6\sqrt{6} \end{aligned}$$

كما يمكنك أيضًا تطبيق خاصية التوزيع على العبارات الجذرية.

مثال ٣

ضرب العبارات الجذرية

بسط كل عبارة فيما يأتي:

$$\begin{aligned} & \text{(أ)} \sqrt{6} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} \\ & \text{خاصية التجميع} \\ & \text{اضرب} \\ & \text{بسط} \\ & \text{اضرب} \\ & \text{(ب)} \sqrt{3}(\sqrt{5} + \sqrt{2}) \\ & \text{خاصية التوزيع} \\ & \text{خاصية التجميع} \\ & \text{اضرب} \\ & \text{بسط} \\ & \text{اضرب} \end{aligned}$$

تحقق من فهمك

$$\begin{aligned} & \text{(أ)} \sqrt{11} \times \sqrt{9} \\ & \text{(ب)} \sqrt{11} - \sqrt{3} \\ & \text{(ج)} \sqrt{7} \times \sqrt{2} \\ & \text{(د)} \sqrt{6} + \sqrt{4} \end{aligned}$$

إرشادات للدراسة

بسط:

يجب تبسيط كل حد جذري أولاً، ثم إجراء العمليات الحسابية المطلوبة.

تنبيه

ضرب العبارات الجذرية
الخطأ الشائع عند ضرب العبارات الجذرية هو جمع ما تحت جذورها لا ضربه؛ لذا تحقق من ضرب ما تحت الجذور.

ويمكنك أيضًا ضرب عبارات جذرية يضم كل منها أكثر من حد واحد. وهو ما يشبه ضرب عبارتين جبريتين ثنائيتي الحد.

مثال ٤ من واقع الحياة ضرب عبارات جذرية



هندسة: أوجد مساحة المستطيل المجاور بأبسط صورة.

$$\sqrt{3} \times \sqrt{4} + \sqrt{5}$$

$$\sqrt{3} - \sqrt{2} \times \sqrt{5}$$

$$(\sqrt{3} \times \sqrt{4} + \sqrt{5})(\sqrt{3} - \sqrt{2} \times \sqrt{5}) = م$$

$$\begin{aligned} & \text{الحَدَانِ الْأُولَانِ} \quad \text{الحَدَانِ فِي الْطَرَفَيْنِ} \quad \text{الحَدَانِ الْأَوْسَطَانِ} \quad \text{الحَدَانِ الْأَخِيرَانِ} \\ & (\sqrt{3} \times \sqrt{4})(\sqrt{3}) + (\sqrt{5})(\sqrt{3}) - (\sqrt{3} \times \sqrt{2} \times \sqrt{5}) - (\sqrt{5})(\sqrt{2} \times \sqrt{5}) = \\ & \text{اضرب} \quad 9 - 10\sqrt{6} - 6\sqrt{10} + 10\sqrt{10} = \\ & \text{بسط} \quad 9 - 10\sqrt{6} - 6\sqrt{10} + 10\sqrt{10} = \end{aligned}$$

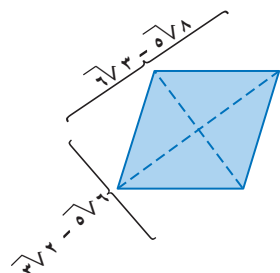
تحقق من فهمك

(٤) **هندسة:** يمكن إيجاد مساحة معين باستعمال المعادلة $\frac{1}{2} \times ق \times ق٢$ ، حيث ق١، ق٢ طولاً قطري المعين. ما مساحة المعين في الشكل المجاور؟

قراءة الرياضيات

طريقة التوزيع بالترتيب:

اضرب ثنائي حد عن طريق إيجاد مجموع حاصل ضرب الحدين الأولين والحدين في الطرفين والحدين الأوسطين والحدين الأخيرين.



ملخص المفهوم

العمليات على العبارات الجذرية

العملية	الرموز	مثال
الجمع، $٠ \leq ب$	$\sqrt{أ} + \sqrt{ب} = \sqrt{أ + ب}$ ما تحت الجذرين متشابه	$\sqrt{3}(٦ + ٤) = \sqrt{3} \times ٦ + \sqrt{3} \times ٤$ $\sqrt{3} \times ١٠ =$
الطرح، $٠ \leq ب$	$\sqrt{أ} - \sqrt{ب} = \sqrt{أ - ب}$ ما تحت الجذرين متشابه	$\sqrt{5}(٨ - ١٢) = \sqrt{5} \times ٨ - \sqrt{5} \times ١٢$ $\sqrt{5} \times ٤ =$
الضرب، $٠ \leq ب، ٠ \leq ج$	$(\sqrt{أ})(\sqrt{ب}) = \sqrt{أ \times ب}$ ليس من الضروري تشابه ما تحت الجذرين.	$(\sqrt{٧} \times \sqrt{٢})(٥ \times ٣) = (\sqrt{١٤}) \times ١٥$ $١٤ \times ١٥ =$

تأكد

بسط كل عبارة فيما يأتي:

الأمثلة ٣-١

$$\sqrt{20} \times \sqrt{2} + \sqrt{5} \times ٤$$

$$\sqrt{٦} - \sqrt{٦} \times (٢)$$

$$\sqrt{٥} \times ٦ + \sqrt{٣} \times (١)$$

$$\sqrt{١٢} - \sqrt{٣} \times ٢ + \sqrt{٧} \times (٦)$$

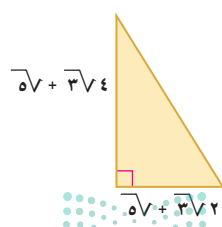
$$\sqrt{١٨} + \sqrt{١٢} + \sqrt{٨} \times (٥)$$

$$\sqrt{٣} - \sqrt{١٢} \times (٤)$$

$$(\sqrt{٢٤} + \sqrt{٢}) \times \sqrt{٥} \times (٩)$$

$$(\sqrt{٢٣} + \sqrt{٧}) \times \sqrt{٣} \times (٨)$$

$$(\sqrt{٦٤}) \times \sqrt{٢} \times ٩$$



(١٠) **هندسة:** يمكن إيجاد مساحة المثلث م باستعمال المعادلة: $\frac{1}{2} \times ق \times ق٢$ ، حيث ق (ق) طول القاعدة، ق٢ ارتفاع المثلث. احسب مساحة المثلث في الشكل المجاور.

مثال ٤

الأمثلة ٣-١

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

$$(١٢) \quad ٣٢\sqrt{٣} - ٥٠\sqrt{٣}$$

$$(١١) \quad ٦\sqrt{٩} + ٦\sqrt{٢}$$

$$(١٤) \quad (٥\sqrt{٣} + ٥\sqrt{٦})\sqrt{٦}$$

$$(١٣) \quad ٣\sqrt{٥} + ٢\sqrt{٣} + ٢\sqrt{٢} - ٣\sqrt{٧}$$

$$(١٦) \quad (٣\sqrt{٦} - ١٠\sqrt{٦})\sqrt{٥}$$

$$(١٥) \quad (٢\sqrt{٣} + ١٠\sqrt{٢})\sqrt{٦}$$

$$(١٨) \quad (٥ - ١٠\sqrt{٢})(٥\sqrt{٣} + ٢\sqrt{٥})$$

$$(١٧) \quad (١٢\sqrt{٦} + ١٥\sqrt{٦})(٢\sqrt{٦} - ٣\sqrt{٦})$$

مثال ٤ (١٩) هندسة: أوجد محيط ومساحة مستطيل عرضه $٧\sqrt{٢} - ٥\sqrt{٢}$ وطوله $٥\sqrt{٣} + ٧\sqrt{٣}$.

بسّط كل عبارة فيما يأتي:

$$(٢٢) \quad ٨\sqrt{٦} - ٢\sqrt{٢} + \frac{1}{\sqrt{٢}}$$

$$(٢١) \quad ٦\sqrt{٦} + \frac{2}{\sqrt{٣}}$$

$$(٢٠) \quad ٥\sqrt{٦} - \frac{1}{\sqrt{٥}}$$

$$(٢٥) \quad ٢(\sqrt{٣} + \sqrt{٦})$$

$$(٢٤) \quad ٢(\sqrt{٥} - ٣)$$

$$(٢٣) \quad \frac{1}{\sqrt{٥}}\sqrt{١٠} - ٢٠\sqrt{٣} + \frac{٥}{\sqrt{٤}}\sqrt{٨}$$

(٢٦) لعبة الأفعوانية: تعبر المعادلة $\sqrt{٦٤ - ٢ع}$ عن سرعة الانطلاق (ع) بالقدم/ ثانية في أدنى نقطة لها عند هبوطها من ارتفاع عمودي (ل) بالأقدام وبسرعة (ع).

(أ) كم تكون سرعة الأفعوانية عند قمة ارتفاعها ٢٢٥ قدمًا كي تصل سرعتها إلى ١٢٠ قدمًا/ ثانية في أدنى نقطة لها؟

(ب) فسّر لماذا لا تكافئ المعادلة $\sqrt{٦٨ - ع}$ المعادلة المعطاة؟



الربط مع الحياة

لعبة الأفعوانية نموذج مصغر لسكة حديدية ملتوية ترتفع عن الأرض، وتعد من الألعاب الشهيرة والرئيسية في مدن الألعاب الكبيرة، ويقبل عليها الكثيرون وخصوصًا الشباب للتسلية والترفيه، ولما يميزها من المتعة والإثارة.

(٢٧) استثمار: استثمر عامر مبلغ ٢٢٥٠٠ ريال في التجارة، فأصبح المبلغ ٢٧٠٠٠ ريال بعد سنتين.

يمكنك استعمال المعادلة $\sqrt{٢٤ - ع} = ١$ لإيجاد معدل الربح السنوي (ر)، حيث تمثل (ع) المبلغ

الأصلي، و (٢ع) المبلغ بعد سنتين. أوجد معدل الربح السنوي للمبلغ الذي استثمره عامر؟

(٢٨) كهرباء: تستعمل المعادلة $\frac{\sqrt{٦٨ - ق}}{\sqrt{٣}} = ١$ لحساب شدة التيار الكهربائي بالأمبير (ت)، حيث (ق) قدرة

الجهاز بالواط، (م) المقاومة بالأوم. ما شدة التيار الكهربائي في فرن الميكروويف إذا كانت قوة التيار

٨٥٠ واط، ومقاومته ٥ أوم؟ اكتب شدة التيار في أبسط صيغة جذرية، ثم قدر قيمته إلى أقرب جزء من

عشرة.

مسائل مهارات التفكير العليا

(٢٩) تحدّ: حدّد إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أو غير صحيحة، وأعط مثالاً أو مثالاً مضاداً:

$$س + ص < \sqrt{س^2 + ص^2} \text{ عندما } س < ٠, ص < ٠$$



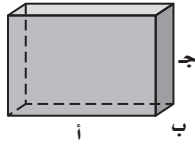
(٣٠) **تبرير:** بين أنه إذا كانت أ، ب، ج، د، أعداداً نسبية، فإن ناتج ضرب: $\sqrt{أب} + \sqrt{أف} - \sqrt{أب} - \sqrt{أف}$ لا يحوي جذوراً. فسر إجابتك.

(٣١) **مسألة مفتوحة:** اكتب معادلة جمع جذرين ما تحت كل منهما مختلف. وفسر كيف يمكنك جمع هذين الجذرين.

(٣٢) **اكتب:** صف بالخطوات كيف تضرب عبارتين جذريتين يتكون كل منهما من جذرين، واكتب مثلاً يوضح ذلك.

تدريب على اختبار

(٣٥) **هندسة:** أي عبارة مما يأتي تمثل مجموع أطوال الاثني عشر حرفاً للمشور الرباعي (متوازي المستطيلات) أدناه؟



(أ) $2(a + b + c)$ (ج) $4(a + b + c)$

(ب) $3(a + b + c)$ (د) $12(a + b + c)$

(٣٣) **إجابة قصيرة:** إذا كان عدد سكان مدينة ١٣٠٠٠٠ نسمة ويتزايدون بمقدار ٢٥٠٠ شخص في السنة، فإنه يمكن التعبير عن عدد سكانها بعد (س) سنة من ذلك بالمعادلة: $ع = ١٣٠٠٠٠ + ٢٥٠٠س$. بعد كم سنة يصبح عدد سكان المدينة ١٤٥٠٠٠؟

(٣٤) أي مما يأتي يكافئ العبارة: $٨(٣-ص) + ٥(٣-ص)$ ؟

(أ) $٣٩-ص$ (ج) $١٣(٣-ص)$

(ب) $٤٠(٣٠-ص)$ (د) $١٣(٦-٢ص)$

مراجعة تراكمية

بسّط كل عبارة فيما يأتي: (الدرس ٩-١)

(٣٨) $\sqrt{٦٠}$

(٣٧) $\sqrt{٢٤}$

(٣٦) $\sqrt{١٨}$

(٤١) $\sqrt{٦٣ج٣د٤ف٥}$

(٤٠) $\sqrt{١٦٩س٤ص٧}$

(٣٩) $\sqrt{١٥٠ب٣٥٠}$

حلّ كل ثلاثية حدود فيما يأتي:

(٤٢) $س٢ + ١٢س + ٢٧$ (٤٣) $ص٣ + ١٣ص + ٣٠$ (٤٤) $ب٢ - ١٧ب + ٧٢$

(٤٥) $س٢ + ٦س - ٧$ (٤٦) $ص٢ - ص - ٤٢$ (٤٧) $٧٢ - ٦و + و٢$

استعد للدرس اللاحق

حلّ كل معادلة فيما يأتي مقرباً الجواب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر:

(٥٠) $٩,٦ = ٤ + م٠,٣$

(٤٩) $٨٤,١ = ٣٣,٧ - ك٢,٦$

(٤٨) $٠,٨ = ١,٢ - ج٤-$

(٥٣) $٨ = ٢,٥ - ٦ + ٣,٦$

(٥٢) $١٣ = \frac{٥-}{٧-} - ٤٤-$

(٥١) $٦ = \frac{ن}{٥} - ١٠-$



المعادلات الجذرية

رابط الدرس الرقمي



www.ien.edu.sa

لماذا؟



طول غاطس القارب الشراعي هو طول الخط الذي يصنعه مع حافة الماء عندما يكون حاملاً أقصى حمولته.

ويمكن تقدير أقصى سرعة للقارب بالكيلومتر/ ساعة باستعمال المعادلة: $E = \sqrt{4L}$ ، حيث L تمثل طول غاطس القارب بالأمتار.

فيما سبق

درست جمع عبارات جذرية وطرحها وضربها.

والآن

- أحل معادلات جذرية.
- أحل معادلات جذرية تتضمن حلولاً دخيلة.

المفردات

المعادلات الجذرية
الحلول الدخيلة

المعادلات الجذرية: المعادلات التي تحتوي متغيرات تحت الجذر، مثل $E = \sqrt{4L}$ تُسمى معادلات جذرية. ولحل مثل هذه المعادلات اجعل المتغير الذي تريد إيجاد قيمته في طرف من المعادلة أولاً، ثم رُبّع طرفي المعادلة؛ للتخلص من الجذر.

مفهوم أساسي **خاصية تربيع طرفي المساواة**

أضف إلى
مطويتك

التعبير اللفظي: إذا رُبّع طرفي معادلة صحيحة، فإن المعادلة الناتجة تبقى صحيحة.

الرموز: إذا كانت $A = B$ ، فإن: $A^2 = B^2$.

مثال: إذا كانت $\sqrt{4} = \sqrt{4}$ ، فإن $(\sqrt{4})^2 = (\sqrt{4})^2$

مثال ١ من واقع الحياة متغير تحت الجذر

إبحار: يبحر إدريس وموسى في قارب شراعي، سرعته ٦٥، ١٦ كلم/ ساعة. أوجد طول الغاطس إلى أقرب عُشر من المتر. بالرجوع إلى فقرة لماذا، حل السؤال التالي:

افهم: تعلم سرعة القارب في رحلته والتي لها علاقة بطول غاطس القارب.

خطّط: يسير القارب بسرعة ٦٥، ١٦ كم/ ساعة ومعادلة السرعة هي: $E = \sqrt{4L}$.

حل: معادلة سرعة القارب $E = \sqrt{4L}$

عوّض $E = ١٦, ٦٥$ $\sqrt{4L} = ١٦, ٦٥$

اقسم على ٤، ٥ $\frac{\sqrt{4L}}{4, 5} = \frac{١٦, ٦٥}{4, 5}$

بسّط $\sqrt{L} = ٣, ٧$

رُبّع طرفي المعادلة $^2(\sqrt{L}) = ^2(٣, ٧)$

بسّط $L = ١٣, ٦٩$

طول الغاطس يساوي ١٣، ٧ مترًا تقريبًا.

تحقق: تحقق بتعويض الحل في المعادلة الأصلية.

معادلة سرعة القارب $E = \sqrt{4L}$

عوّض $E = ١٦, ٦٥$ $L = ١٣, ٧$ $\sqrt{4 \times ١٣, ٧} = ١٦, ٦٥$

اضرب $\sqrt{4 \times ١٣, ٦٩} \approx ١٦, ٦٥$

تحقق من فهمك

(١) **قيادة:** تمثل المعادلة $\sqrt{21,3} = \text{نق}$ السرعة القصوى بالكيلومتر/ ساعة التي يمكن أن تسير بها سيارة بأمان على طريق منحنٍ غير محدد الجانبين، حيث (نق) نصف قطر المنحنى بالأمتار. فإذا صُمم الطريق لسرعة قصوى مقدارها ١٠٥ كلم/ ساعة، فما طول نصف قطر المنحنى؟

لحل المعادلات الجذرية: اجعل الجذر في طرف من المعادلة أولاً، ثم رُبّع طرفيها.

حل المعادلة الجذرية

مثال ٢

حل المعادلة: $\sqrt{12} = 7 + 5 + \sqrt{12}$.

المعادلة الأصلية

$$12 = 7 + 5 + \sqrt{12}$$

اطرح ٧ من الطرفين

$$5 = 5 + \sqrt{12}$$

رُبّع الطرفين، وبسّط

$$25 = (5 + \sqrt{12})^2$$

بسّط

$$25 = 5 + \sqrt{12}$$

اطرح ٥ من الطرفين

$$20 = \sqrt{12}$$

تحقق من فهمك

$$14 = \sqrt{1 + 4} + 4 \quad (\text{ب})$$

$$4 = 2 - 3 - \sqrt{4} \quad (\text{أ})$$

حلول دخيلة: ينتج عن تربيع طرفي المعادلة أحياناً حل لا يحقق المعادلة الأصلية. وهذه الحلول تُسمى **حلولاً دخيلة**؛ لذا عليك التحقق من الحلول كلها في المعادلة الأصلية.

حل المعادلة التي تحتوي متغيراً في كلا طرفيها

مثال ٣

حل المعادلة: $\sqrt{1 + ك} = 1 - ك$. وتحقق من صحة الحل.

المعادلة الأصلية

$$1 - ك = \sqrt{1 + ك}$$

رُبّع الطرفين

$$2(1 - ك) = (1 + ك)^2$$

بسّط

$$1 + ك - 2ك = 1 + 2ك + ك^2$$

اطرح ك، ١ من الطرفين

$$0 = 3 - 2ك$$

حلّل

$$0 = 3 - 2ك$$

خاصية الضرب الصفري

$$0 = 3 - 2ك$$

حل

$$3 = 2ك \quad \text{أو} \quad 0 = 2ك$$

المعادلة الأصلية

$$1 - ك = \sqrt{1 + ك}$$

المعادلة الأصلية

$$1 - ك = \sqrt{1 + ك}$$

عوّض ك = ٣

$$1 - 3 = \sqrt{1 + 3}$$

عوّض ك = ٠

$$1 - 0 = \sqrt{1 + 0}$$

بسّط

$$-2 = 2$$

بسّط

$$1 = 1$$

صحيح

$$2 = 2$$

خطأ

$$1 = 1$$

تحقق:

وبما أن الصفر لا يحقق المعادلة الأصلية؛ لذا فإن ٣ هو الحل الوحيد.

تحقق من فهمك

$$3 - س = \sqrt{1 - س} \quad (\text{ب})$$

$$3 + ت = \sqrt{5 + ت} \quad (\text{أ})$$



مثال ١ (١) **هندسة:** ما طول نصف قطر كرة سلة إذا كانت معادلة مساحة سطحها هي 4π ؟

المثالان ٢، ٣ **حل كل معادلة فيما يأتي، وتحقق من صحة الحل:**

$$\begin{aligned} (٤) \quad 6 &= \sqrt{3-j} + 5 & (٣) \quad 7 &= 3 + \sqrt{2+r} & (٢) \quad 21 &= 1 + \sqrt{10-h} \\ (٧) \quad 1 &= 4 + \sqrt{2-a} & (٦) \quad 2 &= \sqrt{3+n} & (٥) \quad 5 &= 3 - \sqrt{5-s} \end{aligned}$$

تدرب وحل المسائل

مثال ١ (٨) **رياضة:** يمكن استعمال الدالة $E = \sqrt{\frac{9.8L}{V}}$ ، لتقريب أقصى سرعة يمكن أن يركض بها شخص، حيث (ع) السرعة بالمتري/ ثانية، (ل) طول ساق الشخص بالأمتار.

- (أ) ما أقصى سرعة يركض بها شخص طول ساقه ٤٠ متر إلى أقرب جزء من عشرة من المتر؟
 (ب) ما طول الساق لشخص سرعته القصوى ٧، ٢ م/ث إلى أقرب جزء من عشرة من المتر؟
 (ج) هل تزيد السرعة القصوى أم تنقص بزيادة طول الساق؟

المثالان ٢، ٣ **حل كل معادلة فيما يأتي، وتحقق من صحة الحل:**

$$\begin{aligned} (١١) \quad \sqrt{2} \sqrt{3} &= \sqrt{7+k} & (١٠) \quad 21 &= 11 + \sqrt{1} & (٩) \quad 21 &= 11 + \sqrt{1} \\ (١٤) \quad 14 &= 4 + \sqrt{3-a} & (١٣) \quad 3-r &= \sqrt{3+r} & (١٢) \quad \sqrt{12-v} &= \sqrt{v} \\ (١٧) \quad 2 &= 9 - \sqrt{5s} & (١٦) \quad 0 &= 3 - \sqrt{\frac{5k}{4}} & (١٥) \quad \sqrt{2s+9} &= \sqrt{15+s} \end{aligned}$$

(١٨) **بندول:** يُطلق على الزمن (ن) بالثواني الذي يستغرقه بندول ساعة لعمل دورة كاملة الزمن الدوري.

ويُعبر عنه بالمعادلة: $N = 2\sqrt{\frac{L}{32}}$ ، حيث (ل) طول البندول بالأقدام.

- (أ) ما طول بندول ساعة زمنه الدوري ٨ ثوانٍ؟ قرب إلى أقرب قدم.
 (ب) هل زيادة طول البندول تزيد السرعة أم تنقصها؟ فسّر إجابتك.

(١٩) **تمثيلات متعددة:** سوف تكتشف في حل المعادلة $\sqrt{7-s} = 2\sqrt{7-s}$ طرائق متنوعة للحل.

(أ) **بيانيًا:** افتح شاشة جديدة، ثم أدخل الطرف الأيمن من المعادلة على صورة $\sqrt{7-s}$ ، وأدخل الطرف الأيسر على صورة $\sqrt{7-s}$ ، ثم اضغط مفتاح **2: Add Graphs**.

(ب) **بيانيًا:** مثل ما يظهر على الشاشة.

(ج) **تحليليًا:** استعمل مفتاح المقطع من قائمة **3: Intersection Point(s)** لإيجاد نقطة التقاطع.

(د) **تحليليًا:** حل المعادلة الجذرية جبريًا، وكيف يمكن مقارنة حلك بالحل الناتج بيانيًا؟



- (٢٠) **تغليف:** حجم علبة شوكولاتة أسطوانية ١٦٢ سنتيمترًا مكعبًا. تستعمل المعادلة $\sqrt{\frac{ح}{طع}} =$ لإيجاد نصف قطر العلبة، حيث (ح) حجم العلبة، و (ع) ارتفاعها.
- (أ) إذا كان نصف قطر العلبة ٥ سم، فأوجد ارتفاعها إلى أقرب جزء من مئة.
- (ب) إذا كان ارتفاع العلبة ١٠ سم، فأوجد نصف قطرها إلى أقرب جزء من مئة.

مسائل مهارات التفكير العليا

- (٢١) **تبرير:** بين الاختلاف في حل المعادلتين الآتيتين: $\sqrt{س+١} = ٥$ ، $\sqrt{س+١} = ٥$.
- (٢٢) **مسألة مفتوحة:** اكتب معادلة جذرية تحتوي متغيرًا في كلا طرفيها، ثم حل المعادلة.
- (٢٣) **تبرير:** هل المعادلة الآتية صحيحة أحيانًا، أم صحيحة دائمًا أم غير صحيحة أبدًا؟ فسر إجابتك.
- $$\sqrt{٢(٢-س)} = ٢-س$$
- (٢٤) **تحذ:** حل المعادلة: $\sqrt{س+٩} + \sqrt{س+٣} = ٥$
- (٢٥) **اكتب:** بعض القواعد العامة المتعلقة بحل المعادلات الجذرية، موضِّحًا هذه القواعد من خلال حل معادلات جذرية.

تدريب على اختبار

- (٢٦) ما حل المعادلة: $\sqrt{س+٣} - ١ = س - ٤$ ؟
- (أ) ١ ، ٦ (ب) ١ (ج) ١- ، ٦- (د) ٦
- (٢٧) أي العبارات الآتية تكافئ $\sqrt{\frac{٣٦}{٢٧}}$ ؟
- (أ) $\sqrt{\frac{٣}{٣}}$ (ب) $\frac{٣\sqrt{٢}}{٣}$ (ج) $\frac{\sqrt{٦}}{٣}$ (د) $\frac{\sqrt{٢٣}}{٢}$

مراجعة تراكمية

- بسّط كل عبارة فيما يأتي: (الدرس ٩-١)
- (٢٨) $٦\sqrt{٢} \times ٣\sqrt{٧}$ (٢٩) $\sqrt{\frac{٢٧}{٢١}}$ (٣٠) $\sqrt{\frac{٥٠}{٤٤}}$
- (٣١) **فيزياء:** قُذِفَ جسم إلى الأعلى من مستوى الأرض حسب المعادلة $٦٩ - ١٦ن = ٢$ ، حيث (ع) تمثل ارتفاعه بالأقدام، بعد (ن) من الثواني. أوجد قيم ن عندما يكون ارتفاع الجسم ٩٦ قدمًا. (الدرس ٨-٤)
- حلّل كل ثلاثية حدود فيما يأتي إن أمكن ذلك، وإلا فاكتب «أولية». (مهارة سابقة)
- (٣٢) $٥ + س٢ + ٧س$ (٣٣) $٦ب٢ + ٥ب - ٦$ (٣٤) $٩ + ك٢ - ١٩ك$
- حدّد العبارات الوحيدة الحد فيما يأتي، واكتب "نعم" أو "لا"، وفّر إجابتك: (مهارة سابقة)
- (٣٥) ١٢ (٣٦) $٤س٣$ (٣٧) $٢ - أ$

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة: أوجد ناتج كل ممّا يأتي:

- (٣٨) ٢٩ (٣٩) ٦١٠ (٤٠) ٥٤
- (٤١) $٢(٨ف)$ (٤٢) $\frac{٣}{٩}(\frac{٣}{٩})$ (٤٣) $(١٠ص٢)٣$

نظرية فيثاغورس

رابط الدرس الرقمي



www.ien.edu.sa



لماذا؟

تُقاس أجهزة التلفاز بطول قطر شاشاتها، حيث يمكن استعمال نظرية فيثاغورس لإيجاد قياس القطر إذا كان ارتفاع الشاشة وعرضها معلومين.

نظرية فيثاغورس: يُسمّى الضلع المقابل للزاوية القائمة في المثلث القائم **وترًا**، وهو أطول الأضلاع في المثلث ويسمّى كلٌّ من الضلعين الآخرين **ساقًا**.

فيما سبق

درست حل معادلات تربيعية باستعمال خاصية الجذر التربيعي.

والآن

- أحل مسائل باستعمال نظرية فيثاغورس.
- أحدّد إذا كان المثلث المُعطى قائم الزاوية أم لا.

المفردات

الوتر

الساق

المعكوس

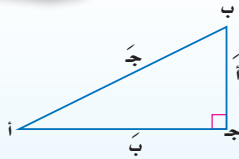
ثلاثية فيثاغورس

أضف إلى

مطويتك

نظرية فيثاغورس

مفهوم أساسي



التعبير اللفظي: إذا كان المثلث قائم الزاوية فإن مربع الوتر يساوي مجموع مربعي ضلعيه (ساقيه).

$$\text{الرموز: } \text{ج}^2 = \text{أ}^2 + \text{ب}^2$$

مثال ١ إيجاد طول ضلع في مثلث قائم

أوجد طول الضلع المجهول في كل مما يأتي، وقرب الحل إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم الأمر:

نظرية فيثاغورس

$$\text{أ} = ١٠، \text{ب} = ٢٤$$

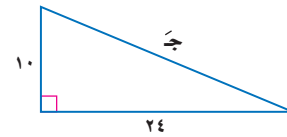
ربع

بسط

أوجد الجذر التربيعي لكلا الطرفين

$$٦٧٦ = ٢(٢٦ \pm)$$

$$\begin{aligned} \text{ج}^2 &= \text{أ}^2 + \text{ب}^2 \\ \text{ج}^2 &= ١٠^2 + ٢٤^2 \\ \text{ج}^2 &= ١٠٠ + ٥٧٦ \\ \text{ج}^2 &= ٦٧٦ \\ \text{ج} &= \sqrt{٦٧٦} \pm \\ \text{ج} &= ٢٦ \pm \end{aligned}$$



بما أن طول الضلع لا يكون سالبًا؛ لذا فإن طول الضلع المجهول هو ٢٦ وحدة.

نظرية فيثاغورس

$$\text{ج} = ٧، \text{أ} = ١٥$$

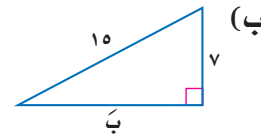
ربع

اطرح ٤٩ من كلا الطرفين

أوجد الجذر التربيعي لكلا الطرفين

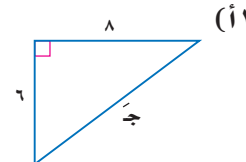
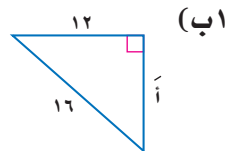
استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة $\sqrt{١٧٦}$

$$\begin{aligned} \text{ج}^2 &= \text{أ}^2 + \text{ب}^2 \\ \text{ج}^2 &= ١٥^2 + ٧^2 \\ \text{ج}^2 &= ٢٢٥ + ٤٩ \\ \text{ج}^2 &= ٢٧٤ \\ \text{ج} &= \sqrt{٢٧٤} \pm \\ \text{ج} &\approx ١٦,٥ \end{aligned}$$



فيكون الطول المجهول هو ١٦,٥ وحدة تقريبًا.

تحقق من فهمك



إرشادات للدراسة

في المثلث أ ب ج يُرمز للضلع المقابل للزاوية أ بالرمز أ، والمقابل للزاوية ب بالرمز ب، والمقابل للزاوية ج بالرمز ج.

مثال ٢ من واقع الحياة إيجاد طول ضلع في مثلث قائم



إبحار: يكون شراع الزورق النهري على صورة مثلث قائم الزاوية كما في الشكل المجاور، أوجد ارتفاع هذا الشراع.

نظرية فيثاغورس

$$٢٣ + ٢٤ = ٢٦$$

ربّع

$$٩ + ٢٤ = ٣٦$$

اطرح ٩ من كلا الطرفين

$$٢٤ = ٢٧$$

أوجد الجذر التربيعي لكلا الطرفين

$$٤ \approx ٥, ٢ \pm$$

استعمل القيمة الموجبة

$$٤ \approx ٥, ٢$$

ارتفاع الشراع ٥, ٢ أمتار تقريباً.

تحقق من فهمك

(٢) لنفرض أن طول أطول ضلع في الشراع ٩ م، وطول أقصر ضلع فيه ٤ م. فأوجد ارتفاع الشراع.

المثلث القائم الزاوية: إذا استُبدل الفرض والنتيجة أحدهما مكان الآخر في العبارة الشرطية (إذا كان فإن)، فإن نتيجة ذلك سيكون **معكوس** العبارة الأصلية. ويمكن استعمال معكوس نظرية فيثاغورس لتحديد إذا كان المثلث قائم الزاوية أم لا.

الزورق النهري زورق شراعي يتوسطه صار عمودي على سطحه يثبت تقريباً في الثلث الأول من مقدمته. ويتصل بهذا الصاري أفقياً عمود آخر يسمى البومة يكون قاعدة للشراع المثلث على الصاري. وللقارب شرعان: أمامي؛ وهو الصغير، وخلفي وهو الشراع الرئيسي.

الربط مع الحياة

أضف إلى

مطوياتك

معكوس نظرية فيثاغورس

مفهوم أساسي

إذا كانت الأطوال أ، ب، جـ لأضلاع مثلث تحقق المعادلة جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢، فإن المثلث قائم الزاوية. وإذا كانت جـ^٢ ≠ أ^٢ + ب^٢، لا يكون المثلث قائم الزاوية.

ثلاثية فيثاغورس: مجموعة من ثلاثة أعداد صحيحة موجبة تحقق المعادلة جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢، حيث جـ أكبر هذه الأعداد. ومن الأمثلة على ذلك "٣، ٤، ٥"، "٥، ١٢، ١٣". وتحقق مضاعفات ثلاثيات فيثاغورس أيضاً معكوس نظرية فيثاغورس؛ لذا فإن "٦، ٨، ١٠" أيضاً من ثلاثيات فيثاغورس.

مثال ٣ التحقق من أن المثلث قائم الزاوية

حدّد إذا كانت الأطوال "٩، ١٢، ١٦" يمكن أن تشكّل أضلاع مثلث قائم الزاوية أم لا. بما أن طول الضلع الأكبر ١٦، فإن جـ = ١٦، أ = ٩، ب = ١٢.

نظرية فيثاغورس

$$جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢$$

عوض جـ = ١٦، أ = ٩، ب = ١٢

$$١٦^٢ \stackrel{؟}{=} ٩^٢ + ١٢^٢$$

ربّع

$$٢٥٦ \stackrel{؟}{=} ٨١ + ١٤٤$$

اجمع

$$٢٥٦ \neq ٢٢٥$$

بما أن جـ^٢ ≠ أ^٢ + ب^٢، فإن قياسات هذه الأضلاع لا تشكّل مثلثاً قائم الزاوية.

تحقق من فهمك

حدّد إذا كانت مجموعة الأطوال الآتية تشكّل أضلاع مثلث قائم الزاوية أم لا:

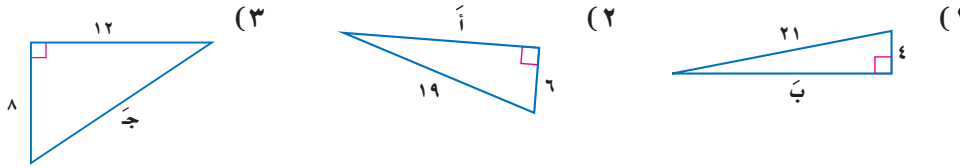
(ب) ٦، ١٢، ١٨

(أ) ٣٠، ٤٠، ٥٠



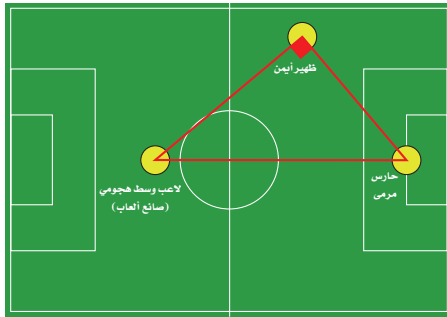
مثال ١

أوجد طول الضلع المجهول في كلٍّ مثلث ممّا يأتي، وقرب الحل إلى أقرب جزء من مئة، إذا لزم الأمر.



مثال ٢

(٤) كرة قدم: يوضح الشكل المجاور ملعب كرة قدم مستطيل الشكل.



(أ) إذا كان طول قطر الملعب ١٢٥ م، وعرضه ٧٥ م، فكم طوله؟

(ب) في لحظة معينة، كما في الشكل، مرّر حارس المرمى الكرة إلى الظهير الأيمن الذي يبعد عنه مسافة ٣٠ م، فركلها مباشرة إلى لاعب الوسط الهجومي الذي يقف على مسافة ٧٢ م منه. فكم يبعد لاعب الوسط الهجومي عن حارس مرماه؟

مثال ٣

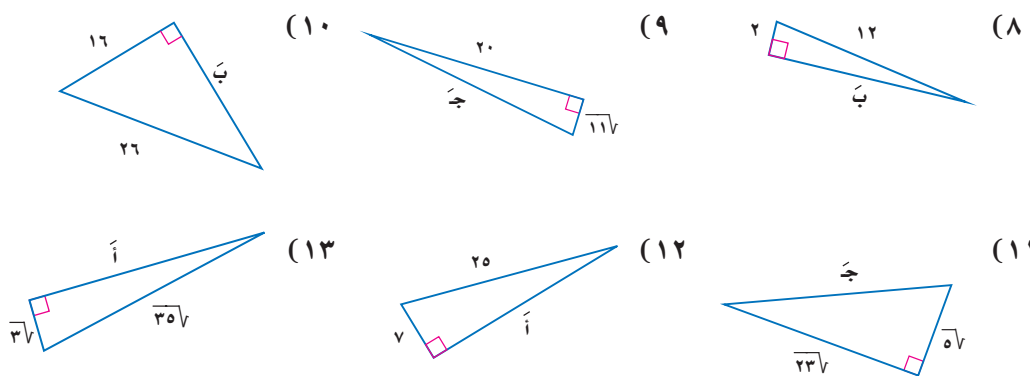
حدّد إذا كانت كل مجموعة من الأطوال الآتية تشكّل أضلاع مثلث قائم الزاوية أم لا:

- (٥) ١٦، ١٢، ٨ (٦) ٢٥، ٢٤، ٧ (٧) ٤٥، ٢٥، ١٥

تدرب وحل المسائل

مثال ١

أوجد طول الضلع المجهول في كلٍّ مثلث ممّا يأتي، وقرب الحل إلى أقرب جزء من مئة، إذا لزم الأمر:



مثال ٢

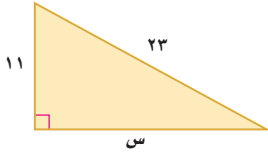
(١٤) تلفاز: أراد مهندس شراء طاولة مستطيلة يضع عليها تلفازًا، قطر قاعدته ٢٧ بوصة، فإذا كان بعدا الطاولة ٢٠ بوصة و٢٦ بوصة. فهل تناسب الطاولة التلفاز؟ فسّر إجابتك.

مثال ٣

حدّد إذا كانت كل مجموعة من الأطوال الآتية تشكّل أضلاع مثلث قائم الزاوية أم لا، ثم حدّد إذا كانت تشكّل ثلاثية فيثاغورس:

- (١٥) ٤١، ٤٠، ٩ (١٦) ٤١٦، ١٠٦، ٢، ٣ (١٧) ١٤، ٧، ٥

- (١٨) ٣٢، ٥، ٣١، ٥، ٨ (١٩) ٩٧، ٢٦، ٦٥ (٢٠) ٩٨، ٣٣، ١٧

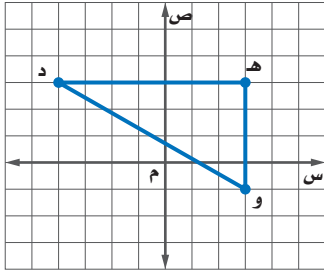


(٢١) **هندسة:** أجب عن الأسئلة الآتية اعتمادًا على المثلث المجاور:

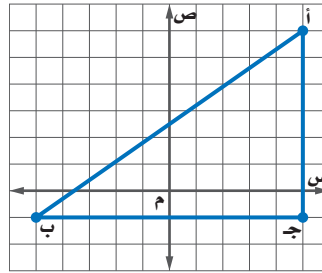
(أ) ما قيمة س؟

(ب) ما مساحة المثلث؟

أوجد طول الوتر في المثلثين الآتيين وقرب الحل إلى أقرب جزء من مئة:

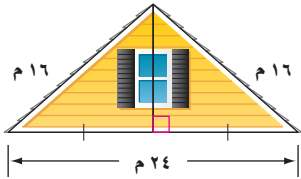


(٢٣)

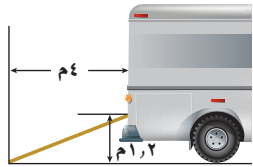


(٢٢)

(٢٤) **هندسة:** أوجد طول قطر مكعب طول ضلعه ٥ سم.



(٢٥) **منزل:** يمثل الشكل المجاور الواجهة العلوية لمنزل عرضها ٢٤ مترًا، وطول الضلعين المائلين لها ١٦ مترًا. أوجد ارتفاع الواجهة مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة من المتر.



(٢٦) **شاحنات:** صنع أحمد منحدرًا خشبيًا لسحب مجموعة صناديق على عربة ذات عجلات من مخزنه إلى الشاحنة كما في الشكل. فما طول المنحدر؟

(٢٧) **هندسة:** أوجد طول قطر مربع مساحته ٢٤٢ سم^٢.

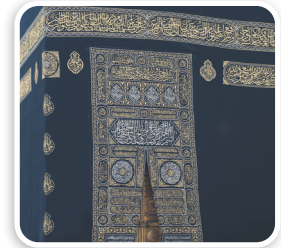
إذا كان جـ يمثل طول الوتر في المثلث القائم الزاوية، فأوجد الطول المجهول في كل مثلث مما يأتي، وقرب الحل إلى أقرب جزء من مئة إن كان ذلك ضروريًا:

(٢٩) أ = ١٢، ب = س - ٢، ج = س

(٢٨) أ = س، ب = س + ٤١، ج = ٨٥

(٣١) أ = س - ٣٢، ب = س - ١، ج = س

(٣٠) أ = س - ٤٧، ب = س، ج = س + ٢



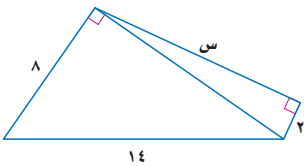
الربط مع الحياة

يقع باب الكعبة المشرفة في الجهة الشرقية منها، والباب الحالي هدية من الملك خالد بن عبدالعزيز، وصنع من ٣٠٠ كيلوجرامًا من الذهب النقي عيار ٩٩, ٩٩

(٣٢) **هندسة:** طول أحد ضلعي مثلث قائم الزاوية أقل بمقدار ٨ سم عن طول الضلع الآخر، وطول وتره ٣٠ سم. أوجد طول كل من ضلعيه.

(٣٣) **الكعبة المشرفة:** باب الكعبة المشرفة مصنوع من الذهب الخالص على هيئة مستطيل أبعاده التقريبية ٢، ٣، ٧، ١ م. فكم طول قطره؟

مسائل مهارات التفكير العليا



(٣٤) **تحذ:** أوجد قيمة س في الشكل المجاور؟

(٣٥) **تبرير:** أعط مثالًا مضادًا للعبارة الآتية:

"تساوى مساحتا مثلثين قائمي الزاوية إذا تساوى طول وتريهما."

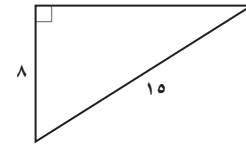
(٣٦) **اكتشف الخطأ:** يحاول حسام وحازم تحديد إن كانت الأعداد "٣٦، ٧٧، ٨٥" تشكل ثلاثية فيثاغورس. فأيهما إجابته صحيحة؟ فسّر إجابتك.

حازم	حسام
$٣٦^2 + ٧٧^2 \stackrel{?}{=} ٨٥^2$	$٣٦^2 + ٧٧^2 \stackrel{?}{=} ٨٥^2$
$١٢٩٦ + ٧٧٢٥ \stackrel{?}{=} ٧٢٢٥$	$١٢٩٦ + ٧٢٢٥ \stackrel{?}{=} ٧٢٢٥$
$٨٩٢٩ \neq ٩٠٢١$	$٧٢٢٥ = ٧٢٢٥$
لا	نعم

(٣٧) **اكتب:** وضح كيف تحدّد إن كانت أطوال ثلاث قطع مستقيمة تشكّل مثلثاً قائم الزاوية.

تدريب على اختبار

(٣٨) **هندسة:** أوجد الطول المجهول في الشكل أدناه.



(ج) $\sqrt{161}$

(أ) ١٧ -

(د) ١٧

(ب) $\sqrt{161}$ -

(٣٩) ما حل المعادلة: $\sqrt{s+1} = 1 + s$ ؟

(أ) ٠، ٣

(ج) ٣

(ب) صفر

(د) ليس لها حل

(٤٠) **إجابة قصيرة:** يتقاضى سبّاك ٤٠ ريالاً عن الساعة

الأولى إذا عمل خارج محله، بالإضافة إلى مبلغ

٨ ريالات عن كل $\frac{1}{4}$ ساعة إضافية. فإذا عمل السبّاك

٤ ساعات، فكم ريالاً يتقاضى؟

مراجعة تراكمية

حلّ كل معادلة فيما يأتي، وتحقّق من صحة الحل: (الدرس ٩-٣)

$$(٤٣) \sqrt{s-15} = 3 - \sqrt{s}$$

$$(٤٢) \sqrt{s+1} = 2 + s$$

$$(٤١) \sqrt{10s} = 10$$

بسّط كل عبارة فيما يأتي: (الدرس ٩-٢)

$$(٤٦) \sqrt{12} + \sqrt{3} + \sqrt{4}$$

$$(٤٥) \sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{3}$$

$$(٤٤) \sqrt{18} - \sqrt{4} + \sqrt{2}$$

أوجد ناتج الضرب في كل ممّا يأتي: (مهارة سابقة)

$$(٤٩) (ص + ٤)(ص - ٨)$$

$$(٤٨) (س - ٤)(س - ٩)$$

$$(٤٧) (ب + ٨)(ب + ٢)$$

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة: حلّ كلّاً من التناسبات الآتية:

$$(٥١) \frac{3}{4} = \frac{12}{s}$$

$$(٥٠) \frac{12}{3} = \frac{s}{5}$$

$$(٥٣) \frac{12}{8+s} = \frac{3}{5}$$

$$(٥٢) \frac{10}{s} = \frac{5}{4}$$



الفصل ٩ اختبار منتصف الفصل

الدروس ٩-١ إلى ٩-٤

٩

حل كل معادلة فيما يأتي، وتحقق من صحة الحل: (الدروس ٩-٣)

$$(١٥) \sqrt{5s-1} = 4$$

$$(١٦) \sqrt{b-2} = 6$$

$$(١٧) \sqrt{15s-1} = 4$$

$$(١٨) \sqrt{3s^2-32} = s$$

$$(١٩) \sqrt{2s-1} = 7$$

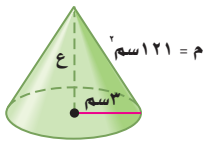
$$(٢٠) \sqrt{s+1} + 2 = 4$$

(٢١) **هندسة:** قانون المساحة الجانبية لمخروط، يعطى بالصيغة

$$M = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$$

ع ارتفاع المخروط، استخدم هذه الصيغة لحساب ارتفاع

المخروط أدناه. (الدروس ٩-٣)



(٢٢) **اختيار من متعدد:** أي الأطوال التالية تشكّل أطوال أضلاع

مثلث قائم الزاوية؟ (الدروس ٩-٤)

(أ) ٩، ١٢، ١٥

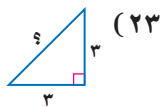
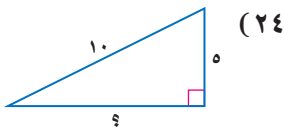
(ب) ٦، ٦، ١٢

(ج) ٣، ٤، ٨

(د) ٣، ٥، ٣

أوجد طول الضلع المجهول في كل مثلث مما يأتي، وقرب الحل

إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر: (الدروس ٩-٤)



بسط كل عبارة فيما يأتي: (الدروس ٩-١)

$$(١) \sqrt{20} \cdot \sqrt{5}$$

$$(٢) \sqrt{12} \cdot \sqrt{18}$$

$$(٣) \sqrt{72s^5}$$

$$(٤) \frac{3}{\sqrt{5}+1}$$

$$(٥) \frac{1}{\sqrt{7}-5}$$

(٦) **اختيار من متعدد:** أي القيم التالية تساوي $\sqrt{\frac{16}{33}}$ ؟

(الدروس ٩-١)

(ج) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(د) ٤

(أ) $\frac{1}{2}$

(ب) ٢

بسط كل عبارة فيما يأتي: (الدروس ٩-٢)

$$(٧) \sqrt{20} + \sqrt{3}$$

$$(٨) \sqrt{12} - \sqrt{3}$$

$$(٩) \sqrt{50} + \sqrt{6}$$

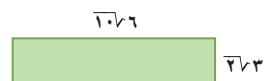
$$(١٠) \sqrt{18} - \sqrt{2}$$

$$(١١) \sqrt{2}(\sqrt{3}-2)$$

$$(١٢) \sqrt{20} \cdot \sqrt{3}$$

$$(١٣) (\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{7} + \sqrt{5})$$

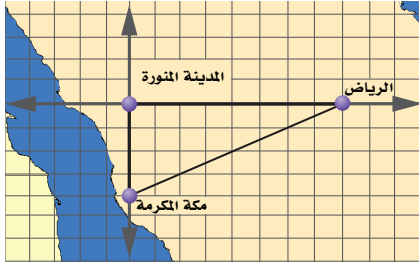
(١٤) **هندسة:** أوجد مساحة المستطيل أدناه. (الدروس ٩-٢)



المسافة بين نقطتين

لماذا؟

تستعمل طائرة الإنقاذ المروحية نظام تحديد المواقع العالمي (GPS) لحساب المسافة المباشرة بين موقعين. وتستطيع التحليق لمسافة ٩٠٠ كيلومتر قبل إعادة تزويدها بالوقود. إذا كانت مهمة الطائرة نقل شخص من مكة المكرمة إلى الرياض، وإذا افترضت أن المدينة المنورة هي نقطة الأصل، ومكة المكرمة عند النقطة $(٠, ٤٠٠)$ ، والرياض عند النقطة $(٨٠٠, ٠)$. فهل يمكن للطائرة إكمال المهمة دون التزود بالوقود في أثناء الطريق؟



فيما سبق

درست استعمال نظرية فيثاغورس.

والآن

أجد المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي.

المفردات

قانون المسافة بين نقطتين

رابط الدرس الرقمي



www.ien.edu.sa

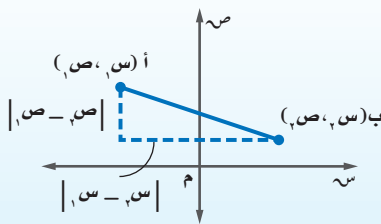
أضف إلى

مطوياتك

المسافة بين نقطتين

مفهوم أساسي

النموذج:



التعبير اللفظي: المسافة بين نقطتين إحداثياتها $(س_١, ص_١)$ ، $(س_٢, ص_٢)$ يُعبر عنها بالقانون:

$$ف = \sqrt{(س_١ - س_٢)^2 + (ص_١ - ص_٢)^2}$$

يمكنك استعمال هذا القانون لإيجاد المسافة بين أي نقطتين على المستوى الإحداثي.

المسافة بين نقطتين

مثال ١

أوجد المسافة بين النقطتين $(٣, ٥)$ ، $(٢, ١)$.

$$ف = \sqrt{(س_١ - س_٢)^2 + (ص_١ - ص_٢)^2} \quad \text{قانون المسافة بين نقطتين}$$

$$(س_١, ص_١) = (٣, ٥), (س_٢, ص_٢) = (٢, ١) \quad \sqrt{(٣ - ٢)^2 + (٥ - ١)^2} =$$

$$\sqrt{(١)^2 + (٤)^2} =$$

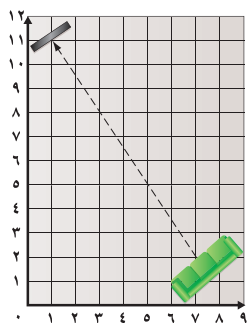
$$\sqrt{١ + ١٦} =$$

$$\sqrt{١٧} = ٤, ٦ \text{ تقريبًا} \quad \text{بسط}$$

تحقق من فهمك

$$(١, ٤), (٢, ٣) \quad (١, ٥), (٢, ٧) \quad (١, ٥), (٢, ٧)$$

مثال ٢ من واقع الحياة استعمال قانون المسافة بين النقطتين



ترفيه: يمتلك صالِح مسرَّحًا منزليًّا. ويوضع التلفاز والمقاعد عادة في ركنين متقابلين من الغرفة؛ حيث يوصي صانعو التلفاز المشاهدين بالجلوس بعيدًا عنه مسافة لا تقل عن ١٣ قدمًا من أجل السلامة. فإذا كان طول كل مربع في المستوى المجاور ١ قدم، فهل غرفة صالِح مناسبة لوضع التلفاز بداخلها؟

مقدمة شاشة التلفاز عند النقطة (١١، ١)، وأول مقعد عند النقطة (٢، ٧).

قانون المسافة بين نقطتين

$$f = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

عوض $(x_1, y_1) = (11, 1)$ ، $(x_2, y_2) = (2, 7)$

$$f = \sqrt{(11 - 2)^2 + (1 - 7)^2}$$

بسّط

$$f = \sqrt{(9)^2 + (-6)^2}$$

$$f = \sqrt{81 + 36} = \sqrt{117}$$

لا، اتساع الغرفة ليس كافيًا لهذا الجهاز.

تحقق من فهمك

٢) يوصي صانعو مكبرات الصوت (الميكروفونات) بوضعها على مسافة لا تقل عن ٨ أقدام من مكان الجلوس. فإذا وضع ميكروفون في النقطة (٩، ٠)، فهل غرفة صالِح مناسبة لوضع الجهاز؟ فسّر ذلك.

يمكنك استعمال قانون المسافة بين نقطتين عند معرفة المسافة بينهما ومعرفة إحداثيات إحدهما لإيجاد الإحداثي المجهول للنقطة الأخرى.



الربط مع الحياة

شَهِدَ المجتمعُ السَّعُودِيُّ الافتتاح الرسمي للتلفزيون في التاسع من ربيع الأول من عام ١٣٨٥ هـ الموافق ٧ يوليو ١٩٦٥ م، وذلك في عهد الملك فيصل - رحمه الله - ويبلغ عدد قنواته حاليًا ٧ قنوات تغطي مجالات مختلفة.

مثال ٣ إيجاد الإحداثي المجهول

أوجد القيم الممكنة للمتغير (أ) إذا كانت المسافة بين النقطتين (٧، ٤)، (أ، ٣) تساوي ٥ وحدات.

قانون المسافة بين نقطتين

$$f = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

عوض $(x_1, y_1) = (7, 4)$ ، $(x_2, y_2) = (A, 3)$ ، $f = 5$

$$5 = \sqrt{(7 - A)^2 + (4 - 3)^2}$$

بسّط

$$5 = \sqrt{(7 - A)^2 + (1)^2}$$

ربّع وبسّط

$$25 = 32 + 18 - 2A$$

ربّع كلا الطرفين

$$25 = 32 + 18 - 2A$$

اطرح ٢٥ من كلا الطرفين

$$7 + 18 - 2A = 0$$

حلّ

$$(7 - A)(1 - A) = 0$$

خاصية الضرب الصفري

$$0 = 7 - A \quad \text{أو} \quad 0 = 1 - A$$

حل كل معادلة

$$7 = A \quad \text{أو} \quad 1 = A$$

تحقق من فهمك

٣) أوجد القيم الممكنة للمتغير (أ) إذا كانت المسافة بين النقطتين (٢، ٦)، (٢، أ) تساوي ١٠ وحدات.

إرشادات للدراسة

قيمتان ممكنتان

عند إيجاد الإحداثي المجهول، يكون أمامك خياران؛ لأن النقطة يمكن أن تكون لها البعد نفسه، ومن اتجاهين مختلفين.



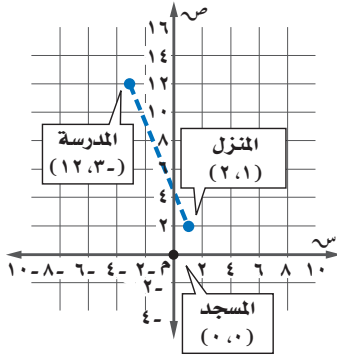
مثال ١

أوجد المسافة بين كل نقطتين فيما يأتي:

(٣) $(-٣, -٥), (-٤, -٢)$

(٢) $(٨, ٤), (-٣, -٦)$

(١) $(٢, -٦), (٨, ١٢)$



مثال ٢

(٤) **مسافات:** في المستوى الإحداثي المجاور، يقع منزل عمر عند

النقطة (١، ٢)، والمدرسة عند النقطة (-٣، ١٢). فإذا كان

المسجد يقع عند النقطة (٠، ٠)، وطول ضلع كل مربع في

المستوى الإحداثي كيلومتر واحد، فأوجد:

(أ) المسافة بين منزل عمر والمدرسة.

(ب) المسافة بين منزل عمر والمسجد.

مثال ٣

في الأسئلة ٥-٨ أوجد القيم الممكنة للمتغير (أ) مستعملًا إحداثيات كل نقطتين، والمسافة المعطاة بينهما.

(٦) $(٦, أ), (٥, ٠)$ ؛ ف $\sqrt{١٧}$

(٥) $(٥, -٥), (١, ٣)$ ؛ ف $\sqrt{٨٩}$

(٨) $(٦, أ), (-٢, ٢)$ ؛ ف $\sqrt{١٠}$

(٧) $(٥, ٨), (أ, ٢)$ ؛ ف $\sqrt{٥}$

تدرب وحل المسائل

مثال ١

أوجد المسافة بين كل نقطتين فيما يأتي:

(١١) $(٣, -٣), (٧, ٢)$

(١٠) $(٩, -٩), (-٦, -٩)$

(٩) $(٥, ٨), (٥, ٧)$

(١٤) $(٥, -٣), (-٥, ٣)$

(١٣) $(١١, -٩), (-٣, -٤)$

(١٢) $(٧, -٨), (٣, ١٠)$

مثال ٢

(١٥) **تحديد مواقع:** أراد سعد وجمال أن يلتقيا في مطعم مشويات

كما في التمثيل المجاور فاستعمل سعد قاربه للوصول إلى

المطعم، في حين استعمل جمال سيارته، علمًا بأن طول ضلع

كل مربع من المستوى الإحداثي يمثل كيلومترًا واحدًا.

(أ) ما المسافة التي قطعها سعد؟

(ب) ما المسافة التي قطعها جمال؟

(ج) ما النسبة بين المسافة التي قطعها سعد إلى المسافة التي

قطعها جمال؟

في الأسئلة ٢٢-٢٥ أوجد القيم الممكنة للمتغير (أ)، مستعملًا إحداثيات كل نقطتين، والمسافة المعطاة بينهما:

(١٧) $(٦, -٦), (-٢, ٥)$ ؛ ف ١٠

(١٦) $(٩, -٢), (أ, ٥)$ ؛ ف ٧

(١٩) $(٤, أ), (٨, ٤)$ ؛ ف $\sqrt{٥}$

(١٨) $(٣, ١), (٠, ٣)$ ؛ ف $\sqrt{٢}$

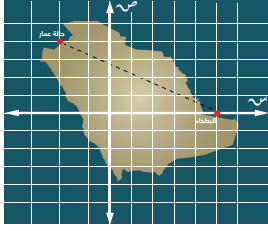
أوجد المسافة بين كل نقطتين فيما يأتي:

(٢٢) $(٤, \sqrt{٥٧}), (٦, \sqrt{٥٧})$

(٢١) $(٢, -\frac{١}{٢}), (٤, -١)$

(٢٠) $(٤, ٢), (٦, -\frac{٢}{٣})$

(٢٣) **هندسة:** أوجد محيط الشكل الرباعي أ ب ج د الذي رؤوسه أ(-٣، -٤)، ب(-١، ٤)، ج(٤، ٥)، د(٦، -٥)، ثم قرب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة.



(٢٤) **منافذ المملكة:** يقع منفذ حالة عمّار عند النقطة $(-2, 4)$ ،

ومنفذ البطحاء عند $(5, 0)$. ما المسافة الجوية التقريبية بين المنفذين؟

مقياس الرسم: تمثّل كل وحدة على الخارطة ٢٠٠ كلم

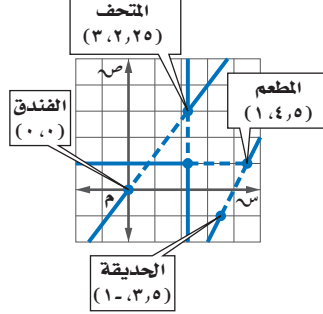
(٢٥) **سياحة:** يستعمل أحمد نظام تحديد المواقع العالمي (GPS)

كما في التمثيل المجاور للانتقال من الفندق إلى المتحف الوطني وإلى المطعم ثم إلى الحديقة العامة، ويمثّل طول ضلع كل مربع من المستوى الإحداثي ٥٠٠ م. قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من مئة.

(أ) ما المسافة التي يقطعها من الفندق إلى المتحف؟

(ب) ما المسافة بين المتحف والمطعم؟

(ج) أوجد المسافة المباشرة من الحديقة العامة إلى الفندق.

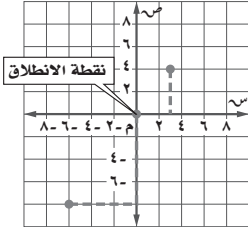


مسائل مهارات التفكير العليا

(٢٦) **تحّد:** إذا كانت أ $(3, -7)$ ، ب $(0, 4)$ ، ج $(-4, -4)$ إحداثيات رؤوس مثلث، فناقش طريقتين مختلفتين لتحديد ما إذا كان المثلث أ ب ج قائم الزاوية أم لا.

(٢٧) **تبرير:** فسّر لماذا تكون هناك قيمتان ممكنتان عند البحث عن الإحداثي المجهول لنقطة عند إعطاء إحداثيات نقطتين والمسافة بينهما.

تدريب على اختبار



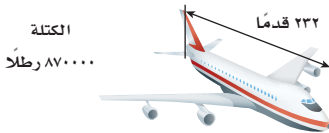
(٢٨) **إجابة قصيرة:** انطلق قاربان من الموقع نفسه وفي الوقت نفسه كما في التمثيل أدناه، فاتجه أحدهما شرقاً ثم شمالاً. أما الآخر فاتجه جنوباً ثم غرباً. ما المسافة بينهما؟

مراجعة تراكمية

إذا كان ج يمثّل طول الوتر في المثلث القائم الزاوية، فأوجد الطول المجهول في كل مثلث مما يأتي، وقرّب الحل إلى أقرب جزء من مئة: (الدرس ٩-٤)

(٢٩) أ 16 ، ب 63 ، ج $?$ (٣٠) ب 3 ، أ 113 ، ج $?$ ج 14 ، أ 9 ، ب $?$

(٣١) **طيران:** يمكن تمثيل العلاقة بين طول طائرة (ل) بالأقدام، والكتلة المناسبة لأجنحتها (ب) بالأرطال بالمعادلة $l = \sqrt{k \cdot b}$ ، حيث (ك) ثابت التناسب، أوجد قيمة (ك) لهذه الطائرة إلى أقرب جزء من مئة. (الدرس ٩-٣)



استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

حلّ كلّاً من التناسبات الآتية، مقرباً الناتج إلى قرب جزء من مئة إذا لزم:

(٣٤) $\frac{34}{21} = \frac{20}{8}$

(٣٣) $\frac{5}{15} = \frac{6}{5}$

(٣٢) $\frac{2}{10} = \frac{4}{5}$

(٣٧) $\frac{45}{68} = \frac{5}{2}$

(٣٦) $\frac{9}{5} = \frac{16}{7}$

(٣٥) $\frac{7}{ج} = \frac{6}{7}$



لماذا؟

لقياس ارتفاع سارية علم المدرسة يحتاج فهد إلى قياس طول ظله وطول ظل السارية، ثم استعمال المثلثات المتشابهة والقياسات غير المباشرة.

المثلثات المتشابهة: تسمى المثلثات التي لها الشكل نفسه **المثلثات المتشابهة**، إلا أنه ليس من الضروري أن تكون لها أطوال الأضلاع نفسها. والرمز $\sim$ يُستعمل ليشير إلى مثلثين متشابهين. وتُكتب رؤوس المثلثات المتشابهة ع

إلى مثلثين متشابهين. وتكتب رؤوس المثلثات المتشابهة عادة بالترتيب للدلالة على الأجزاء المتناظرة.

فيما سبق

درست حل التناسبات.

والآن

- أحدّد ما إذا كان مثلثان متشابهين أم لا.
- أجد العناصر المجهولة في مثلثين متشابهين.

المضردات

المثلثات المتشابهة

مفهوم أساسي

المثلثات المتشابهة

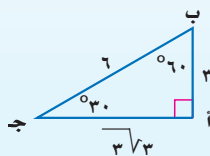
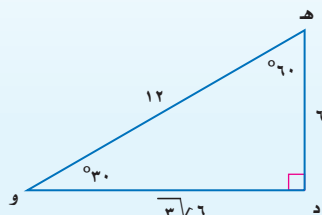
أضف إلى

مطوياتك

التعبير اللفظي: إذا تشابه مثلثان، فإن قياسات زواياهما المتناظرة متساوية، وقياسات أضلاعهما المتناظرة متناسبة.

مثال: إذا كان Δ أب جـ $\sim \Delta$ د هـ، فإن $ق \Delta = ق \Delta د$ ، $ق \Delta ج = ق \Delta و$ ،

ق ل ب = ق ل هـ .
 أب ب ج = أ ج د هـ .
 $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$



يمكن استعمال المقارنة بين قياسات الزوايا المتناظرة لتحديد إن كان المثلثان متشابهين.

مثال ۱

تحديد المثلثين المتشابهين

حدد ما إذا كان المثلثان الآتيان متشابهين أم لا، وبرّر إجابتك:

$$\Delta_{\text{قياس}} = (57 + 57) - 180 = 34^\circ$$

ففي Δ دهو، يتساوى ق $\angle$ د، مع ق $\angle$ هـ

ولتكن $s = q \leq d = q \leq h$

$$180 = 66 + \text{س} + \text{س}$$

۱۱۴ = ۲س

س = ۵۷

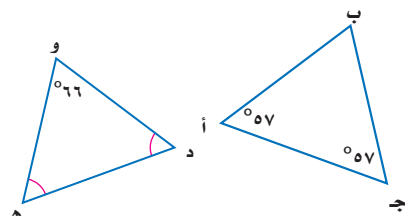
ولذا فإن $ق \triangle د = ٥٧^\circ$ ، $ق \triangle هـ = ٥٧^\circ$. وبما أن قياسات الزوايا المتناظرة متساوية،

فإن Δ هـ و د $\sim \Delta$ أ ب جـ.

تحقق من فهمك

(١) حدّد ما إذا كان Δ أب ج الذي فيه $ق \Delta = ٦٨$ ، $ق \Delta = ب$ ، $ق \Delta = ج$ بشاه Δ ده ف حيث

ق ٤ هـ = ق ٤ ف = ٥٤، و بر اجابتك.



مجموع قياسات زوايا المثلث ١٨٠

اطرح ٦٦ من كلا الطرفين

اقسم كلا الطرفين على ٢

يمكنك أيضًا استعمال المقارنة بين نسب أطوال الأضلاع المتناظرة؛ لتحديد إن كان المثلثان متشابهين.

قراءة الرياضيات

قياس الزوايا

ق لا يُقرأ: قياس الزاوية أ.

إرشادات للدراسة

المثلثات المتداخلة

في المثلثين المتداخلين يمكنك رسم كل منهما على حدة، مع التأكد من كون العناصر المتناظرة في الموقع نفسه، وضع إشارات لتوضيح الزوايا والأضلاع المتناظرة.

مثال ٢ تحديد المثلثين المتشابهين

حدّد ما إذا كان المثلثان الآتيان متشابهين أم لا، وبرّر إجابتك:

إذا كان $\triangle$ ف س ز، $\triangle$ و س ص متشابهين، فإن أطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة.

$$\frac{ف س}{و س} = \frac{١٢}{٤} = ٣, \frac{س ز}{س ص} = \frac{١٥}{٥} = ٣, \frac{ف ز}{و ص} = \frac{٩}{٣} = ٣$$

بما أن الأضلاع المتناظرة متناسبة، فإن $\triangle$ ف س ز $\sim \triangle$ و س ص.

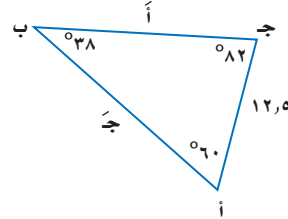
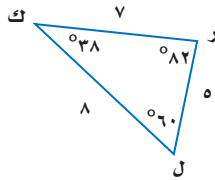
تحقق من فهمك

(٢) حدّد ما إذا كان $\triangle$ أ ب ج والذي فيه أ ب = ٦، ب ج = ١٦، أ ج = ٢٠ يشابه $\triangle$ ع ك ل، حيث ع ك = ٣، ك ل = ٨، ع ل = ٩. وفّرر إجابتك.

إيجاد قياسات العناصر المجهولة: يمكنك استعمال التناسب لإيجاد قياسات العناصر المجهولة، عندما تكون بعض أطوال أضلاع المثلثات المتشابهة معلومة.

مثال ٣ إيجاد قياسات العناصر المجهولة

أوجد قياسات العناصر المجهولة في المثلثين المتشابهين الآتيين:



الأضلاع المتناظرة في المثلثات المتشابهة متناسبة

$$\frac{أ ب}{د ع} = \frac{ب ج}{ع ك} = \frac{أ ج}{د ك}$$

$$\frac{٧}{١٢,٥} = \frac{٨}{٥} = \frac{٥}{٧}$$

$$٨٧,٥ = أ٥ \text{ اضرب تبادلياً}$$

$$١٧,٥ = أ٥ \text{ اقسم على ٥}$$

الأضلاع المتناظرة في المثلثات المتشابهة متناسبة

$$\frac{أ ب}{د ع} = \frac{ب ج}{ع ك} = \frac{أ ج}{د ك}$$

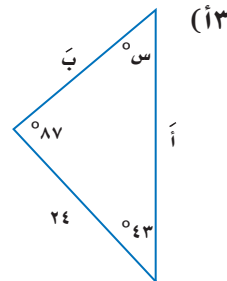
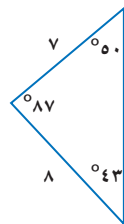
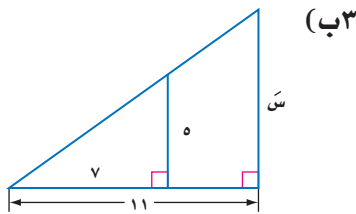
$$\frac{١٢,٥}{٥} = \frac{٨}{٥} = \frac{٥}{٧}$$

$$١٠٠ = ب٥ \text{ اضرب تبادلياً}$$

$$٢٠ = ب٥ \text{ اقسم على ٥}$$

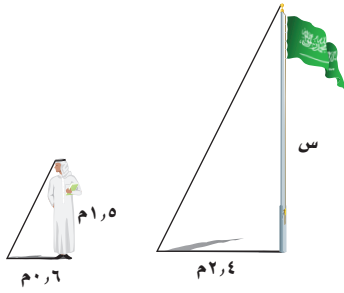
قياسات العناصر المجهولة ٢٠، ٥، ١٧.

تحقق من فهمك



مثال ٤ من واقع الحياة القياسات غير المباشرة

ظل: أراد سلطان قياس ارتفاع سارية العلم، فوقف بجانبها. إذا علمت أن طول سلطان متر ٥٠ سنتمترًا، وطول ظله ٦٠ سنتمترًا، وطول ظل السارية في تلك اللحظة متران و٤٠ سنتمترًا، فما ارتفاع السارية؟



افهم: أوجد ارتفاع سارية العلم.

خطّط: ارسم شكلًا للموقف.

حل: أشعة الشمس تشكّل مثلثات متشابهة. اكتب تناسبًا يقارن بين ارتفاعات الأجسام وأطوال ظلالها. لتكن س = ارتفاع سارية العلم

$$\begin{aligned} \text{ارتفاع السارية} &\rightarrow \frac{س}{١,٥} = \frac{٢,٤}{٠,٦} \rightarrow \text{طول ظل السارية} \\ \text{طول سلطان} &\rightarrow \frac{٠,٦}{١,٥} = \frac{٢,٤}{س} \rightarrow \text{ارتفاع السارية} \end{aligned}$$

$$٣,٦ = س, ٦$$

س = ٦ فيكون ارتفاع سارية العلم يساوي ٦ أمتار.

عوض عن س بـ ٦.

$$\frac{٢,٤}{٠,٦} = \frac{٦}{١,٥}$$

$$٣,٦ = ٣,٦$$

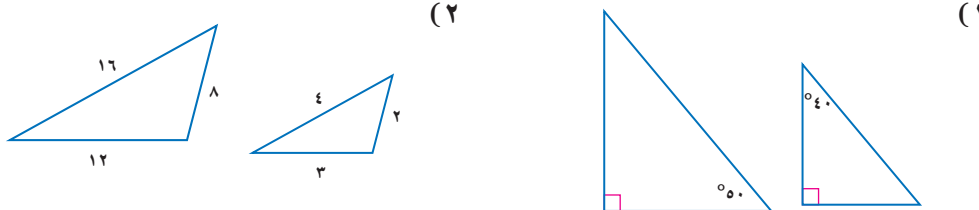
تحقق من فهمك

٤) خرائط: استعمل على خريطة المملكة مقياس رسم فيه كل ١ سم تمثّل ٢٥٠ كلم، إذا كانت المسافة بين جدة والمدينة المنورة على الخريطة ٦٨, ١ سم تقريبًا. فكم المسافة الحقيقية بينهما؟

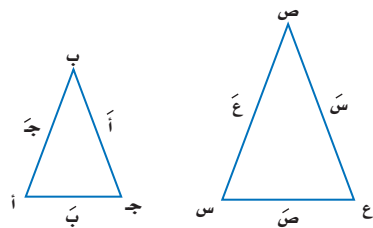
تأكد

المثالان ١، ٢

حدّد ما إذا كان كل زوج من المثلثات في السؤالين الآتيين متشابهين أم لا، وبرّر إجابتك:



في الأسئلة ٣-٦، إذا كان $\triangle A \sim \triangle B$ ، فأوجد قياسات العناصر المجهولة:



$$(٣) \quad \begin{aligned} &A = ٤, B = ٦, C = ٨, \text{س} = ٦ \\ &A = ٤, B = ٦, C = ٨, \text{س} = ٦ \end{aligned}$$

$$(٤) \quad \begin{aligned} &A = ٩, B = ١٥, C = ٢١, \text{س} = ٧ \\ &A = ٩, B = ١٥, C = ٢١, \text{س} = ٧ \end{aligned}$$

$$(٥) \quad \begin{aligned} &A = ٢, B = ٥, C = ١٠, \text{س} = ٣٠ \\ &A = ٢, B = ٥, C = ١٠, \text{س} = ٣٠ \end{aligned}$$

$$(٦) \quad \begin{aligned} &A = ٦, B = ١٠, C = ٣٠, \text{س} = ١٥ \\ &A = ٦, B = ١٠, C = ٣٠, \text{س} = ١٥ \end{aligned}$$

مثال ٣

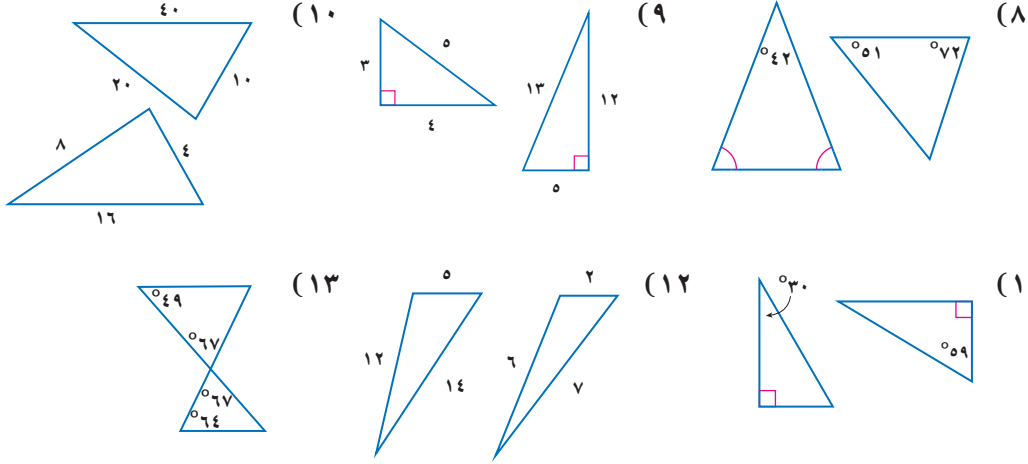
مثال ٤

٧) أشجار: ترغب مريم في إيجاد ارتفاع شجرة في حديقتها، طول ظلها متران و٥٠ سنتمترًا. فإذا كان طول مريم متر و٥٠ سنتمترًا، وطول ظلها في تلك اللحظة ٧٥ سنتمترًا. فما ارتفاع الشجرة؟

تدرب وحل المسائل

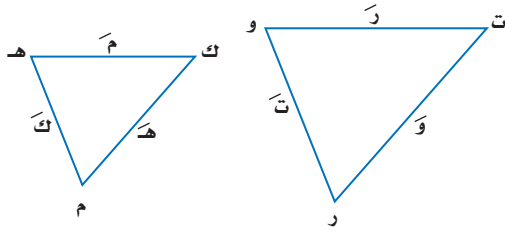
المثالان ١، ٢

حدّد ما إذا كان كل زوج من المثلثات في الأسئلة الآتية متشابهين أم لا، وبرّر إجابتك:



مثال ٣

في الأسئلة ١٤-١٨، إذا كان $\triangle م ك هـ \sim \triangle ر ت و$ ، فأوجد قياسات العناصر المجهولة:



$$(١٤) \quad م = ٢, ك = ٧, هـ = ٤, ر = ٤$$

$$(١٥) \quad ر = ٥, و = ٧, ت = ١٥, هـ = ٦$$

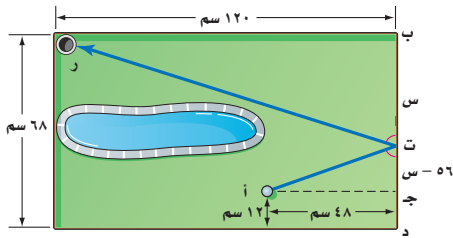
$$(١٦) \quad م = ٥, و = ٩, ك = ٣, ت = ١٣, هـ = ٧٥$$

$$(١٧) \quad م = ٤, هـ = ٨, و = ٢, ت = ٥٦, ر = ٨٤$$

$$(١٨) \quad م = ٣٧, ك = ٧٧, ت = ١٤٧, و = ١٠٧$$

مثال ٤

(١٩) **ألعاب:** يستعمل تصميم نموذج المركبات المقياس ١ سم : ٢٤ م، من الطول الفعلي للمركبة. إذا كان للمركبة الأصلية نافذة على شكل مثلث قائم الزاوية. ارتفاعها ٧٦ م، فكم سيكون ارتفاع النافذة على النموذج؟



(٢٠) **جولف:** يلعب حمد لعبة جولف مصغرة كما في الشكل المجاور، ويريد قذف الكرة من النقطة أ إلى النقطة ت لترتد وتدخل الحفرة ر. استعمل تشابه المثلثات لتحديد بعد نقطة الارتداد عن الرأس ب.



الربط مع الحياة

حقّق لاعب ومدرب المنتخب السعودي للجولف علي بلحارث بطولة الكأس الوطنية لدولة باكستان للجولف التي نُظّمت في ربيع الثاني ١٤٣١ هـ في نادي ديراب للجولف في الرياض بمشاركة ١٠٠ لاعب.

(٢١) **خرائط:** يظهر مقياس رسم لخريطة المملكة أن ٢,٥ سم على الخريطة تمثّل ١٠٠ كيلومتر في الواقع. فإذا كانت المسافة بين مكة المكرمة والمدينة المنورة على الخريطة ٨ سم، فما البعد الحقيقي بينهما؟

(٢٢) **مشروع المدرسة:** خطّط معلم التاريخ لعمل نموذج للكعبة المشرفة على مقياس رسم ٥ سم : ٦ م. فإذا كان الارتفاع الفعلي للكعبة المشرفة ١٤ م، فكم سيكون ارتفاع النموذج؟

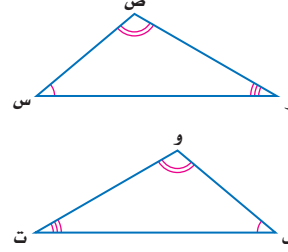


مسائل مهارات التفكير العليا

(٢٣) **اكتشف الخطأ:** قارنت رفف ونوال بين المثلثين المتشابهين المجاورين. فأيهما كانت مقارنتها صحيحة؟ فسّر إجابتك.

نوال
 $\triangle ق \triangle س = ق \triangle و$
 $\triangle ق \triangle ص = ق \triangle ف$
 $\triangle ق \triangle ز = ق \triangle ت$
 $\triangle س \triangle ص \triangle ز \sim \triangle و \triangle ف \triangle ت$

رفف
 $\triangle ق \triangle س = ق \triangle ت$
 $\triangle ق \triangle ص = ق \triangle و$
 $\triangle ق \triangle ز = ق \triangle ف$
 $\triangle س \triangle ص \triangle ز \sim \triangle و \triangle ف \triangle ت$

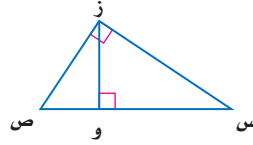


إرشادات حل المسألة

رسم مخطط

ارسم الشكل عندما يتطلب حل المسألة تبريراً مكانياً أو شكلاً هندسياً. فمثلاً في السؤال ٢٤ ارسم كل مثلث وحده ليساعدك على الحل.

(٢٤) **تحّد:** المثلث س ص ز يشابه المثلثين المتشابهين المكوّنين من القطعة المستقيمة العمودية الواصلة بين ز والقطعة المستقيمة س ص. اكتب ثلاث عبارات تتعلق بهذين المثلثين، ولم تشابه؟



(٢٥) **تبرير:** حدد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائماً، أم صحيحة أحياناً، أم غير صحيحة أبداً؟ فسّر إجابتك.

"إذا ضربت أطوال أضلاع مثلث في ٣، فإن زوايا المثلث بعد تكبيره لها نفس قياسات زوايا المثلث الأصلي".

(٢٦) **مسألة مفتوحة:** ارسم مثلثاً وسمّه أ ب ج، ثم ارسم المثلث المشابه له وسمّه و ك ر، على أن تكون مساحته ٤ أمثال مساحة أ ب ج. واطرح استراتيجيتك.

(٢٧) **اكتب:** لخص كيف تحدد أن المثلثين متشابهان؟ وكيف تجد القياسات المجهولة فيهما؟

تدريب على اختبار

(٢٩) أي المعادلات الآتية تمثّل مستقيماً مقطعه الصادي -٤، وميله ٦؟

- (أ) $ص = ٦س - ٤$ (ب) $ص = ٦س + ٤$
 (ج) $ص - ٦ = س + ٤$ (د) $ص + ٦ = س + ٤$

(٢٨) أوجد المسافة بين النقطتين (٢، -٤)، (-٨، ٥).

- (أ) $٣٣\sqrt{}$ (ب) $٦٥\sqrt{}$
 (ج) $١٣٥\sqrt{}$ (د) $١٥٣\sqrt{}$



مراجعة تراكمية

أوجد المسافة بين كل نقطتين فيما يأتي: (الدرس ٩-٥)

$$(30) (3, 0), (9, 1) \quad (31) (-2, 4), (5, 13) \quad (32) (-1, 5), (-1, 5)$$

حدّد ما إذا كانت كل مجموعة من الأطوال الآتية تشكل أضلاع مثلث قائم الزاوية أم لا. (الدرس ٩-٤)

$$(33) 3, 4, 5 \quad (34) 8, 10, 12 \quad (35) 10, 24, 26$$

حلّل كل كثيرة حدود فيما يأتي إن أمكن ذلك، وإلا فاكتب "أولية": (مهارة سابقة)

$$(36) 100 - 2x \quad (37) 9 - 6x + 2x^2 \quad (38) 48 - 2x^2 + 9x$$

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

إذا كانت: $a = 3$ ، $b = -2$ ، $c = 6$ ، فاحسب كلّ ما يأتي:

$$(41) \frac{a-b}{c}$$

$$(40) \frac{ab}{c}$$

$$(39) \frac{b}{c}$$

$$(43) \frac{2-b}{a}$$

$$(42) \frac{3-a}{b}$$



استقصاء النسب المثلثية



يمكنك استعمال ورقة المربعات لاستقصاء نسب أطوال أضلاع المثلثات القائمة الزاوية.

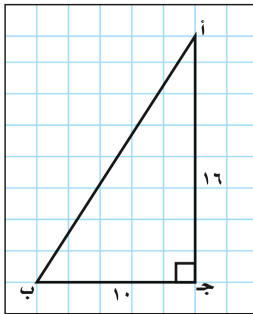
اجمع البيانات:

الخطوة ١: استعمل مسطرة وورقة مربعات لرسم عدة مثلثات قائمة الزاوية النسبة بين ضلعي القائمة لكل منها ٨ : ٥، سمّ الرأس أ، ب، ج، حيث ج هي الزاوية القائمة والرأس ب يقابل الساق الأطول، والرأس أ يقابل الساق الأقصر.

الخطوة ٢: انسخ الجدول أدناه، وأكمل الأعمدة الثلاثة الأولى بإيجاد طول الوتر (الضلع أ ب) في كل مثلث قائم مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة.

الخطوة ٣: احسب النسب وسجلها في العمودين الأوسطين مقربة إلى أقرب جزء من مئة.

الخطوة ٤: استعمل المنقلة لقياس الزاويتين أ، ب بدقة، مقرباً إلى أقرب درجة، ثم سجل قياسات الزوايا في الجدول.



أطوال الأضلاع			النسب		قياسات الزوايا	
الضلع ب ج	الضلع أ ج	الضلع أ ب	$\frac{ب ج}{أ ج}$	$\frac{ب ج}{أ ب}$	الزاوية أ	الزاوية ب
٢,٥	٤					٩٠°
٥	٨					٩٠°
١٠	١٦					٩٠°
						٩٠°
						٩٠°
						٩٠°

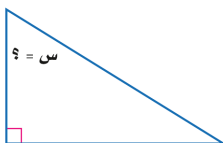
حلّ النتائج:

(١) تفحص قياسات الزوايا في الجدول والنسب بين أطوال الأضلاع. ماذا تلاحظ؟ اكتب جملة أو جملتين لوصف أي نمط تراه.

خمن:

(٢) ما النسبة بين طولي أقصر وأطول ضلع في مثلث قائم الزاوية ومشابه للمثلثات التي رسمتها هنا؟

(٣) إذا كانت نسبة طول أقصر ضلع إلى الوتر في مثلث قائم الزاوية هي ٥٣, ٠ تقريباً. فما قياس الزاوية الحادة الكبرى في المثلث القائم الزاوية؟



النسب المثلثية

لماذا؟

يعني معدل انحدار طريق بنسبة ٢٥٪ أن الطريق ترتفع أو تنحدر ٢٥ قدمًا لكل ١٠٠ قدم أفقيًا. ويمكن استعمال النسب المثلثية لإيجاد قياس زاوية ارتفاع الطريق أو انحدارها.



النسب المثلثية: حساب المثلثات هو دراسة العلاقة بين زوايا المثلث وأضلاعه. والنسبة المثلثية هي النسبة التي تقارن بين طولي ضلعين من أضلاع المثلث القائم. والنسب المثلثية الثلاث الأكثر شيوعًا هي الجيب، وجيب التمام، والظل، وهي موضحة في الجدول أدناه:

فيما سبق

درست استعمال نظرية فيثاغورس.

والآن

- أجد النسب المثلثية للزوايا.
- أستعمل النسب المثلثية لحل المثلث.

المضردات

- حساب المثلثات
- النسب المثلثية
- الجيب
- جيب التمام
- الظل
- حل المثلث
- معكوس الجيب
- معكوس جيب التمام
- معكوس الظل

مفهوم أساسي

النسب المثلثية

أضف إلى
مطوياتك

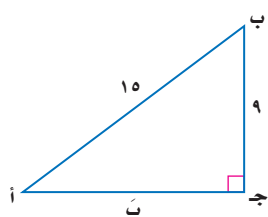
النموذج	الرموز	التعبير اللفظي
	جا أ = $\frac{أ}{ج}$	جيب الزاوية أ = $\frac{\text{الضلع المقابل للزاوية أ}}{\text{الوتر}}$
	جتا أ = $\frac{ب}{ج}$	جيب تمام الزاوية أ = $\frac{\text{الضلع المجاور للزاوية أ}}{\text{الوتر}}$
	ظا أ = $\frac{أ}{ب}$	ظل الزاوية أ = $\frac{\text{الضلع المقابل للزاوية أ}}{\text{الضلع المجاور للزاوية أ}}$

مثال ١

إيجاد نسب الجيب وجيب التمام، والظل

أوجد قيم النسب المثلثية الثلاث للزاوية أ.

الخطوة ١: استعمل نظرية فيثاغورس لإيجاد ج.



$$\begin{aligned} أ^2 &= ب^2 + ج^2 & \text{نظرية فيثاغورس} \\ ١٥^2 &= ٩^2 + ج^2 & \\ ٢٢٥ &= ٨١ + ج^2 & \\ ١٤٤ &= ج^2 & \\ ١٢ &= ج & \text{أوجد الجذر التربيعي لكلا الطرفين} \end{aligned}$$

الخطوة ٢: استعمل أطوال الأضلاع لكتابة النسب المثلثية.

$$\begin{aligned} \text{جا أ} &= \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{٩}{١٥} = \frac{٣}{٥} & \text{جتا أ} &= \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{١٢}{١٥} = \frac{٤}{٥} & \text{ظا أ} &= \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{٩}{١٢} = \frac{٣}{٤} \end{aligned}$$

تحقق من فهمك

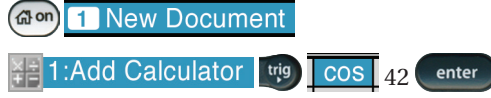
(١) أوجد قيم النسب المثلثية الثلاث للزاوية ب.

مثال ٢

استعمال الحاسبة لإيجاد قيم العبارات

استعمل الحاسبة لإيجاد جتا ٤٢ إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

اضغط على المفاتيح:



قرب إلى أقرب جزء من ألف.

جتا ٤٢ $\approx ٠,٧٤٣١$.

تحقق من فهمك

تنبيه

وضع الآلة الحاسبة (mode)

كن متأكدًا من وضع الآلة الحاسبة (mode) للعمل بالدرجات.

٢ جتا ٥٥

٢ ب ظا ٧٦

٢ أ جتا ٣١

استعمل النسب المثلثية: عندما تجد القياسات المجهولة لأضلاع المثلث القائم وزواياه، فإنك تكون بذلك قد قمت **بحل المثلث**، ويمكنك إيجاد القياسات المجهولة إذا علمت طولي ضلعين في المثلث، أو طول ضلع وقياس إحدى الزاويتين الحادتين.

مثال ٣

حل المثلث

حل المثلث القائم الزاوية مقربًا طول كل ضلع إلى أقرب جزء من عشرة.

الخطوة ١: أوجد قياس Δ . $١٨٠ = (٩٠ + ٤١) - ٤٩$

قياس $\Delta = ٤٩$.

الخطوة ٢: أوجد أ. بما أن قياس الضلع المقابل للزاوية ب معطى وتريد إيجاد قياس الضلع المجاور للزاوية ب، فاستعمل نسبة الظل.

تعريف الظل

$$\frac{ب}{أ} = \tan ٤١^\circ$$

$$أ = \frac{ب}{\tan ٤١^\circ}$$

اضرب كلا الطرفين في أ

اقسم الطرفين على ظا ٤١، استعمل الحاسبة

$$أ = \frac{٦}{\tan ٤١^\circ} \approx ٩,٦$$

لذا يكون $أ = ب = ٩,٦$ تقريبًا.

الخطوة ٣: أوجد ج. بما أن قياس الضلع المقابل للزاوية ب معطى وتريد إيجاد قياس الوتر، فاستعمل نسبة الجيب.

تعريف الجيب

$$\frac{ج}{أ} = \sin ٤١^\circ$$

$$ج = \frac{أ}{\sin ٤١^\circ}$$

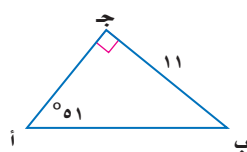
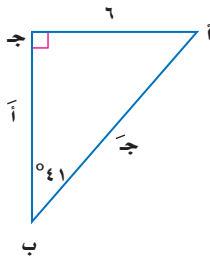
اضرب كلا الطرفين في ج

اقسم الطرفين على جتا ٤١، استعمل الحاسبة

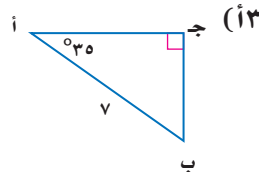
$$ج = \frac{٩,٦}{\sin ٤١^\circ} \approx ١١,٩$$

ولذا فإن $ج = أ = ب = ٩,٦$ تقريبًا.

تحقق من فهمك

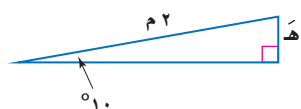


(ب٣)



مثال ٤ من واقع الحياة إيجاد طول الضلع المجهول

تمرين: يضع المدرب جهاز التمرين الرياضي مائلاً بمقدار 10° ، فإذا كان طول سطح السير على الجهاز ٢ م، فكم يجب رفع نهايته عن الأرض بالستمرات تقريباً؟



تعريف الجيب $\sin 10^\circ = \frac{هـ}{٢}$

اضرب كلا الطرفين في ٢ $٢ \times \sin 10^\circ = هـ$

استعمل الحاسبة $هـ \approx ٠,٣٥$

فتكون قيمة هـ بالأمتار تساوي ٠,٣٥، اضرب ٠,٣٥ في ١٠٠ لتحويل الأمتار إلى سنتيمترات. يرفع المدرب الجهاز ٣٥ سم تقريباً.



الربط مع الحياة

للتمتع بصحة مثالية يجب على جميع الأشخاص من العمر ١٦-٦٥، التدريب لمدة ٣٠ دقيقة على الأقل على نشاط متوسط الشدة لمدة خمسة أيام في الأسبوع.

تحقق من فهمك

(٤) **لوح التزلج:** ما طول لوح تزلج يصنع مع سطح الأرض زاوية قياسها 25° ، ويرتفع طرفه ٢ م؟

يُعبّر عن قاعدة الدالة المثلثية إذا علمت الجيب أو جيب التمام أو الظل لزاوية حادة، فيمكنك إيجاد قياسها باستعمال معكوس النسب المثلثية.

مفهوم أساسي

معكوس الدوال المثلثية

أضف إلى

مطويتك

إذا كانت Δ زاوية حادة، وكان:

التعبير اللفظي: $\sin \Delta = \frac{س}{س}$ فإن **معكوس جيب** س ورمزه $\sin^{-1}$ س يساوي قياس Δ أ.

الرموز: إذا كان $\sin \Delta = س$ ، فإن $\sin^{-1} س = ق$ Δ أ.

التعبير اللفظي: $\cos \Delta = \frac{س}{س}$ فإن **معكوس جيب تمام** س ورمزه $\cos^{-1}$ س يساوي قياس Δ أ.

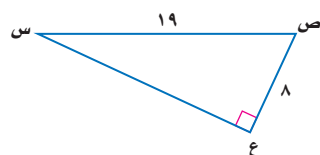
الرموز: إذا كان $\cos \Delta = س$ ، فإن $\cos^{-1} س = ق$ Δ أ.

التعبير اللفظي: $\tan \Delta = \frac{س}{س}$ فإن **معكوس ظل** س ورمزه $\tan^{-1}$ س يساوي قياس Δ أ.

الرموز: إذا كان $\tan \Delta = س$ ، فإن $\tan^{-1} س = ق$ Δ أ.

مثال ٥

إيجاد قياس الزاوية المجهولة



أوجد Δ ص إلى أقرب درجة.

تعلم طول الضلع المجاور للزاوية ص وقياس الوتر. استعمل نسبة جيب التمام.

تعريف جيب التمام $\cos \Delta = \frac{٨}{١٩}$

استعمل الحاسبة البيانية ودالة جتا $\cos^{-1}$ لإيجاد قياس الزاوية.

اضغط على المفاتيح: $\cos^{-1}$ 8 $\div$ 19 $\rightarrow$ enter 65.098937

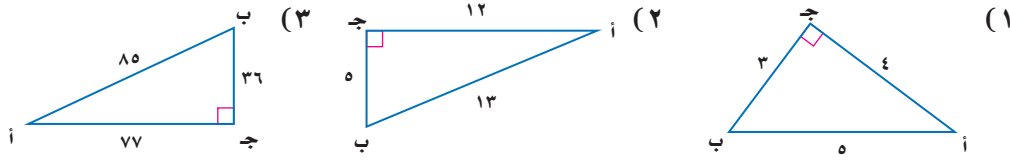
تحقق من فهمك

(٥) أوجد Δ س مقرباً إلى أقرب درجة إذا كان $\sin \Delta = ١٤$ ، $\cos \Delta = ٥$.



مثال ١

أوجد قيم النسب المثلثية الثلاث للزاوية أ في كل مما يأتي:



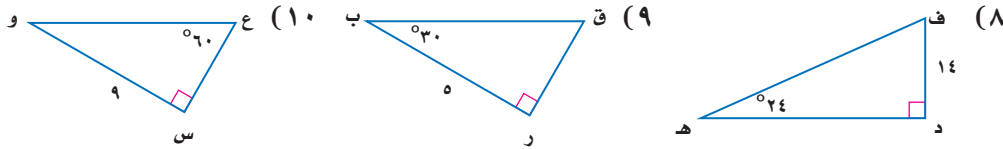
مثال ٢

استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة كل نسبة مثلثية فيما يأتي، مقربة إلى أقرب جزء من عشرة آلاف في كل مما يأتي:

- (٤) جا 37° (٥) جتا 23° (٦) ظا 14° (٧) جتا 82°

مثال ٣

حلّ كلّ مثلث قائم الزاوية فيما يأتي مقرباً طول كل ضلع إلى أقرب جزء من عشرة:



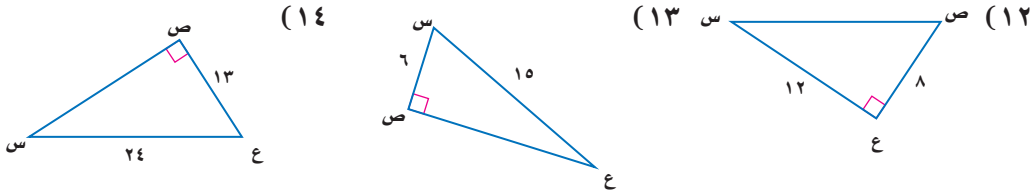
مثال ٤

(١١) **تزلج على الجليد:** في موقع للتزلج على أحد التلال، كان ارتفاع التلة الرأسى ١٠٠٠ م، وزاوية ميلها عن مستوى الأرض 18° ، قدر طول (ر).



مثال ٥

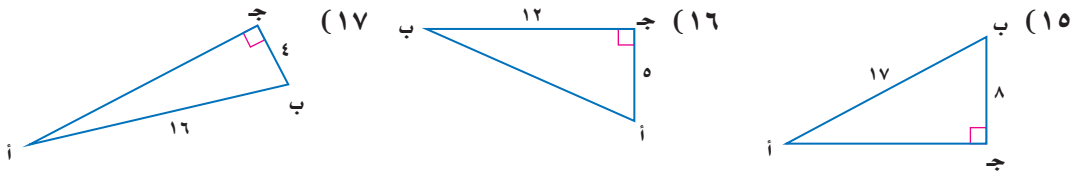
أوجد قـ لـ س لكل مثلث فيما يأتي مقرباً إلى أقرب درجة:



تدرب وحل المسائل

مثال ١

أوجد قيم النسب المثلثية الثلاث للزاوية ب في كل مما يأتي:



مثال ٢

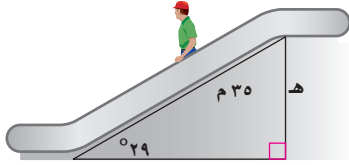
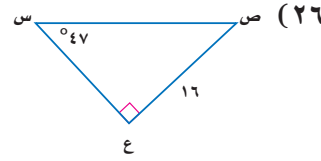
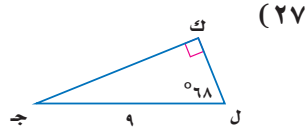
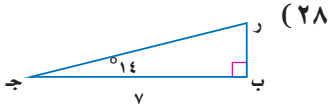
استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة كل نسبة مثلثية فيما يأتي، مقربة إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

- (١٨) ظا 2° (١٩) جا 89° (٢٠) جتا 44° (٢١) ظا 45°
 (٢٢) جا 73° (٢٣) جتا 90° (٢٤) جا 30° (٢٥) ظا 60°



مثال ٣

حل كل مثلث قائم فيما يأتي مقرباً طول كل ضلع إلى أقرب جزء من عشرة:

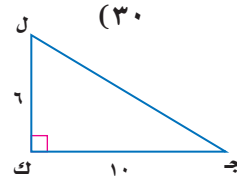
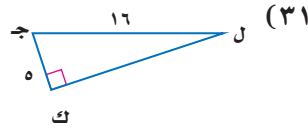
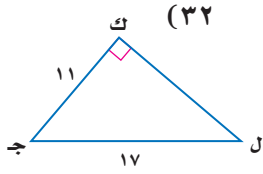


مثال ٤

(٢٩) سلم كهربائي: يبلغ طول السلم الكهربائي في أحد الأسواق الكبيرة ٣٥ متراً، وقياس الزاوية التي يكونها مع الأرض ٢٩°، أوجد ارتفاع السلم.

مثال ٥

أوجد ق لـ ج لكل مثلث قائم الزاوية فيما يأتي مقرباً إلى أقرب درجة:



(٣٣) وقف الملك عبدالعزيز: يصل ارتفاع أبراج وقف الملك عبد العزيز المطلة على المسجد الحرام إلى ٤٠٠ متر. ينظر عمار إلى أعلى الأبراج بزاوية ٥٥°. فما بُعد عمار عن قاعدة الأبراج؟

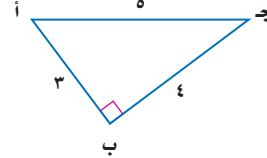
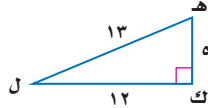
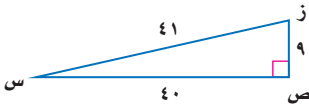
(٣٤) غابات: يقدر حارس غابة ارتفاع شجرة بنحو ٥٠ متراً. فإذا كان الحارس يقف على بعد ٣٠ متراً من قاعدة الشجرة، فما مقياس الزاوية التي يشكلها مع قمة الشجرة؟

في السؤالين ٣٥-٣٦، افترض أن لـ أ زاوية حادة في المثلث القائم أ ب ج، ثم أوجد:

(٣٥) ج أ، ظ أ إذا كان جتا أ = $\frac{3}{4}$.

(٣٦) ظ أ، جتا أ إذا كان جتا أ = $\frac{2}{3}$.

(٣٧) تمثيلات متعددة: سوف تكتشف في هذه المسألة العلاقة بين دوال الجيب ودوال جيب التمام.



(أ) جدولياً: انقل الجدول الآتي وأكمّله مستعملاً المثلثات أعلاه:

المثلث	النسب المثلثية	ج أ	جتا أ	ج أ + جتا أ =
أ ب ج	ج أ =	جتا أ =	جتا أ =	جتا أ =
	ج ب =	جتا ب =	جتا ب =	جتا ب =
هـ ك ل	ج هـ =	جتا هـ =	جتا هـ =	جتا هـ =
	ج ل =	جتا ل =	جتا ل =	جتا ل =
س ص ز	ج س =	جتا س =	جتا س =	جتا س =
	ج ز =	جتا ز =	جتا ز =	جتا ز =

(ب) لفظياً: خمن علاقة مجموع مربعي دالتي الجيب وجيب التمام لزاوية حادة في مثلث قائم الزاوية.

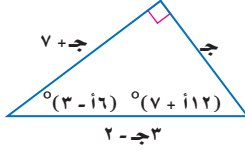
(٣٨) غواصات: إذا نزلت غواصة مسافة ٣ أميال قطرياً بزاوية مقدارها ١٠° مع قاع محيط. فكم يصبح بعدها عن سطح الماء؟



الربط مع الحياة

يبلغ طول أطول شجرة معمرة نحو ١١٥ متراً. وهناك نحو ١٣٥ شجرة من هذا النوع يزيد طولها على ١٠٧ أمتار.

مسائل مهارات التفكير العليا



(٣٩) **تحذ:** حلّ المثلث في الشكل المجاور.

(٤٠) **تبرير:** استعمل تعريف نسب الجيب وجيب التمام في تعريف نسبة الظل.

(٤١) **مسألة مفتوحة:** اكتب مسألة تستعمل فيها نسبة جيب التمام لإيجاد قياس زاوية مجهولة في مثلث قائم الزاوية، ثم حلّها.

(٤٢) **تبرير:** إذا كان جيب زاوية وجيب تمامها متساويين، فماذا تستنتج عن المثلث؟

(٤٣) **اكتب:** وضح كيف يمكن استعمال النسب المثلثية لإيجاد أطوال الأضلاع المجهولة في مثلث عُلِمَ فيه قياس زاوية حادة وطول أحد الأضلاع.

تدريب على اختبار

(٤٥) **إجابة قصيرة:** يتقاضى مندوب مبيعات ٦٤٠٠٠ ريال راتباً سنوياً، إضافة إلى ٥٪ من قيمة مبيعاته. ما قيمة المبيعات التي عليه بيعها ليزيد دخله السنوي حتى ٩٠٠٠٠ ريال؟

(٤٤) أيّ المتباينات الآتية تعبّر عن التمثيل البياني أدناه؟

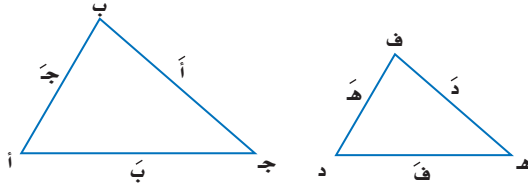


(أ) $-2 \leq x \leq 4$ (ج) $x \leq 4$ أو $x \geq -2$

(ب) $-2 > x > 4$ (د) $x < 4$ أو $x > -2$

مراجعة تراكمية

في الأسئلة ٤٦-٤٨، إذا كان $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ، فأوجد قياسات العناصر المجهولة: (الدرس ٩-٦)



(٤٦) $AB = 6$ ، $BC = 8$ ، $AC = 10$

(٤٧) $DE = 9$ ، $EF = 12$ ، $DF = 14$

(٤٨) $AB = 6$ ، $BC = 8$ ، $AC = 10$

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

إذا اخترت عشوائياً كرة من كيسٍ يحوي ٩ كراتٍ حمراء و ٦ كراتٍ زرقاء و ٥ كراتٍ صفراء، فأوجد كلاً من الاحتمالات الآتية:

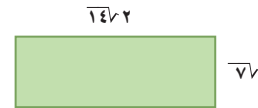
(٤٩) ح (زرقاء) (٥٠) ح (حمراء) (٥١) ح (ليست صفراء)



بسّط كل عبارة فيما يأتي:

$$(١) \sqrt{36} \cdot 5 \quad (٢) \frac{3}{\sqrt{2}-1} \quad (٣) \sqrt{2} \cdot 7 + \sqrt{2} \cdot 2 \quad (٤) (\sqrt{2} \cdot 5) \sqrt{2} \cdot 3$$

(٥) هندسة: أوجد مساحة المستطيل.



$$(١) \sqrt{2} \cdot 14 \quad (ج) 14$$

$$(ب) \sqrt{2} \cdot 98 \quad (د) \sqrt{2} \cdot 7$$

حلّ كل معادلة فيما يأتي، وتحقق من صحة الحل:

$$(٦) \sqrt{10} \cdot 20 = 20 \quad (٧) \sqrt{4} \cdot 3 - 6 = 3 - 6$$

(٨) تغليف: حجم علبة شوكولاتة أسطوانية ١٦٢ سنتيمترًا

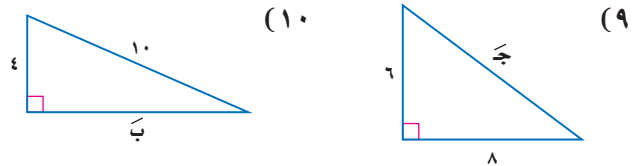
مكعبًا. وتستخدم المعادلة $\frac{C}{\pi} = \sqrt{\frac{4}{\pi}}$ لإيجاد نصف قطر

العلبة، حيث (نق) نصف قطر الأسطوانة، (ع) ارتفاعها، (ح)

حجمها. فإذا كان ارتفاع الأسطوانة ٢٥، ٨، ستتمت، فأوجد

نصف قطرها.

أوجد طول الضلع المجهول في كل مثلث مما يأتي، وقرب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر:



أوجد المسافة بين كل نقطتين فيما يأتي:

$$(١١) (٣، ٢)، (٣، ٥) \quad (١٢) (٤، ٣)، (٤، ٢)، (٣، ٥)$$

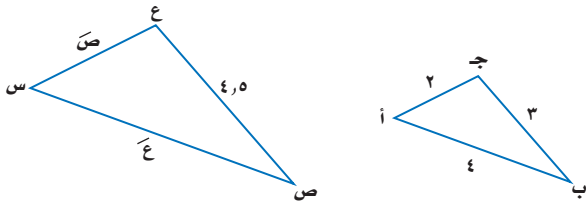
$$(١٣) (١، ١)، (١، ٢)، (٢، ٣) \quad (١٤) (٤، ٦)، (٦، ٧)، (١، ٧)$$

(١٥) خدمة التوصيل: يقدم أحد مطاعم الوجبات السريعة

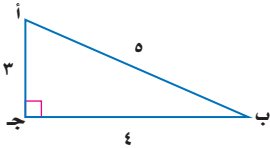
خدمة توصيل مجانية إلى أي موقع ضمن دائرة نصف قطرها ١٠ كلم من المطعم. فقطع الشخص الذي سيوصل الوجبات ٣٢ شارعًا شمالًا، ثم ٤٥ شارعًا إلى الشرق لإيصال الطلب، علمًا بأن البعد بين كل شارعين في هذه المدينة هو $\frac{1}{4}$ كلم. (أ) هل الموقع خارج نطاق الخدمة المجانية؟ فسّر ذلك.

(ب) صف موقعين للتوصيل يكون البعد بينهما ١٠ كلم تقريبًا.

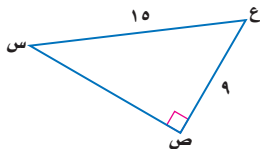
(١٦) إذا كان $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ ، فأوجد أطوال الأضلاع المجهولة.



(١٧) أوجد قيم النسب المثلثية الثلاث للزاوية أ.



(١٨) أوجد ق $\angle C$ مقربًا إلى أقرب درجة.



اختيار من متعدد

اقرأ كل سؤالٍ ممَّا يأتي، ثم اختر رمز الإجابة الصحيحة :

١) بسِّط $\frac{1}{\sqrt{2}+4}$

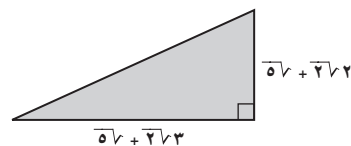
(أ) $\frac{\sqrt{2}+4}{14}$

(ب) $\frac{\sqrt{2}-2}{7}$

(ج) $\frac{\sqrt{2}-4}{14}$

(د) $\frac{\sqrt{2}+2}{7}$

٢) ما مساحة المثلث أدناه؟



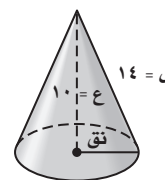
(أ) $5\sqrt{2} + 3\sqrt{3}$

(ب) $10\sqrt{2} + 17$

(ج) $5\sqrt{2} + 3\sqrt{3}$

(د) $10\sqrt{2} + 8,5$

٣) يحسب طول راسم المخروط (ل) المبيَّن بالشكل أدناه بالعلاقة $ل = \sqrt{ع^2 + نق^2}$ ، حيث نق نصف قطر القاعدة، ع ارتفاع المخروط، استعمل هذه العلاقة لإيجاد نق في الشكل أدناه.



(أ) 9, 8

(ب) 4, 9

(ج) 10, 2

(د) 6, 3

٤) أيُّ الأطوال التالية لا تمثِّل أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية؟

(أ) (٢٤، ١٦، ١٢)

(ب) (٢٦، ٢٤، ١٠)

(ج) (٥١، ٤٥، ٢٤)

(د) (٣٠، ٢٤، ١٨)

٥) أيُّ ممَّا يأتي لا يُعدُّ عاملاً من عوامل $س^٤ - ١٦$ ؟

(أ) $س - ٢$

(ب) $س + ٢$

(ج) $س^٢ + ٤$

(د) $س + ٤$

إرشادات للاختبارات

سؤال ٣: عوّض بقيم ل، ع في العلاقة، ثم أوجد قيمة نق.



إجابة قصيرة

أجب عن الأسئلة الآتية:

(٦) ما عدد المرات التي تتقاطع فيها الدالة $s = 2 - 4s + 10$ مع محور السينات؟

(٧) حلّ كثيرة الحدود $2s^2 - 32$ تحليلًا تامًا.

(٨) بسّط العبارة $2 - \left(\frac{2 - 2r - 2n}{3 - 2r - 5n} \right)$

(٩) استعمل خاصية التوزيع لتحليل

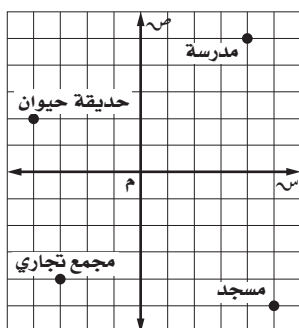
$3s^2 - 6s + 3 = 3(s^2 - 2s + 1)$

(١٠) حلّ ثلاثية الحدود: $2s^2 + 3s - 9$

إجابات مطولة

أجب عن السؤال الآتي موضّحًا خطوات الحل:

(١١) حدّدت هدى مواقع بعض الأماكن في حيّها في المستوى الإحداثي المبين أدناه، حيث الوحدة = ٥, ٢ ميل



(أ) أوجد المسافة الحقيقية بين المدرسة والمسجد مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم.

(ب) إذا وقع منزل هدى في منتصف المسافة بين المدرسة والمجمع التجاري، فأوجد إحداثيات موقع منزل هدى موضّحًا خطوات الحل.

للمساعدة ..

١١	١٠	٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١	إذا لم تجب عن السؤال
٥-٩	مهارة سابقة	مهارة سابقة	مهارة سابقة	مهارة سابقة	٢-٨	مهارة سابقة	٤-٩	٣-٩	١-٩	مهارة سابقة	فراجع الدرس ..

الفصل ١٠ الإحصاء والاحتمال

فيما سبق

درست إيجاد قيم احتمالات لحوادث بسيطة.

والآن

- أصمّم دراسات مسحية وأقوم نتائجها.
- أحلّ مسائل باستعمال التبديل والتوافق.
- أجد احتمالات حوادث مركبة.

لماذا؟

قطار الحرمين: مشروع قطار

الحرمين السريع هو أحد العناصر الهامة في برنامج توسعة شبكة الخطوط الحديدية في المملكة ويصل بين مكة المكرمة والمدينة المنورة، ومجهزاً بأنظمة إشارات واتصالات حديثة، ويقوم المهندسون بمراقبة حركة القطار والمحطات وتدوين ملاحظاتهم في استمارات خاصة لتحليلها باستعمال الطرق الإحصائية، بهدف الارتقاء بالخدمات المقدمة للحجاج والمعتمرين.

المفردات:

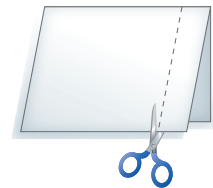
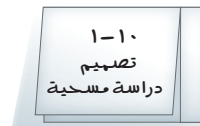
- العينة ص (٩٠)
- الإحصاء الاستدلالي ص (١٠٢)
- الانحراف المعياري ص (١٠٣)
- التبديل ص (١١٠)
- التوافق ص (١١١)
- الحادثة المركبة ص (١١٧)

الإحصاء والاحتمال: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول الإحصاء والاحتمال، مبتدئاً بست أوراق A4 .

منظم أفكار

المطويات

- اطول كل ورقة من المنتصف. وقصّ شريطاً طويلاً طويلاً بعرض ٥, ٢ سم من الحافة اليمنى حتى خط الطي، ثم افصل الشريط عن خط الطي.
- سمّ خمسة من هذه الأوراق بأرقام الدروس وعناوينها.
- اكتب على جزأي كل ورقة من الداخل: "تعريفات" و"أمثلة".
- رتّب الأوراق بعضها فوق بعض، وثبّتها من طرفها الأيمن، واكتب عنوان الفصل على الصفحة الأولى، واكتب ملاحظاتك على جزأي الورقة من الداخل.





التهيئة للفصل ١٠

أجب عن الاختبار الآتي. انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

مراجعة سريعة

مثال ١

إذا اخترت عشوائيًا مكعبًا واحدًا من كيس يحتوي ٦ مكعبات حمراء و ٤ صفراء و ٣ زرقاء ومكعبًا واحدًا أخضر، فأوجد كلاً من الاحتمالات الآتية: (مهارة سابقة)

(١) ح (أحمر) (٢) ح (أزرق)

(٣) ح (ليس أحمر) (٤) ح (أبيض)

(٥) إذا ألقى سعد مكعب أرقام مرة واحدة، فما احتمال ظهور الرقم ٥؟

(٦) أدار محمود مؤشر قرص دوّار مقسّم إلى ٨ قطاعات متساوية، بألوان مختلفة أحدها باللون الأزرق. ما احتمال أن يستقر المؤشر على القطاع الأزرق؟

مثال ٢

أوجد ناتج ضرب $\frac{3}{4} \times \frac{4}{5}$ في أبسط صورة.

اضرب البسطين

اضرب المقامين

بسّط

اكتب الكسر في أبسط صورة

$$\frac{3 \times 4}{4 \times 5} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{12}{20} =$$

$$\frac{3}{5} =$$

أوجد ناتج الضرب واكتبه في أبسط صورة: (مهارة سابقة)

$$\frac{7}{10} \times \frac{4}{19} \quad (٨)$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{5}{4} \quad (٧)$$

$$\frac{6}{11} \times \frac{5}{12} \quad (١٠)$$

$$\frac{7}{32} \times \frac{4}{32} \quad (٩)$$

$$\frac{17}{27} \times \frac{9}{34} \quad (١٢)$$

$$\frac{24}{100} \times \frac{56}{100} \quad (١١)$$

مثال ٣

اكتب الكسر $\frac{33}{80}$ على صورة نسبة مئوية، وقرب الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة.

بسّط وقرب

$$0,413 \approx \frac{33}{80}$$

اضرب الكسر العشري في ١٠٠ $41,3 = 100 \times 0,413$

$$\text{إذن، } 41,3\% \approx \frac{33}{80}$$

اكتب كل كسر من الكسور الآتية على صورة نسبة مئوية، مقربًا الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة: (مهارة سابقة)

$$\frac{7}{8} \quad (١٤)$$

$$\frac{14}{17} \quad (١٣)$$

$$\frac{625}{1024} \quad (١٦)$$

$$\frac{107}{125} \quad (١٥)$$

(١٧) **تسوق:** زار ٢٠٠٠ متسوق مركزًا تجاريًا، ٧٠٠ منهم دون سن ٢١. فما النسبة المئوية لمن هم دون سن ٢١ من بين المتسوقين؟





تصميم دراسة مسحية

لماذا؟



عند صناعة الملابس الرياضية يجب التحقق من عدة أمور لضمان الجودة؛ مثل: فحص نوع القماش، ومدى مناسبتها للرياضة المعنية، والألوان، والأعمال الفنية المطبوعة عليه وغيرها. وستكون التكلفة عالية جدًا إذا فحص كل شيء يتم إنتاجه في المصنع؛ لذا فإنه يتم فحص عدد محدود من تلك الملابس بدلًا من ذلك.

وجميع الملابس الرياضية المنتجة تشكّل المجتمع، بينما تشكّل الملابس الرياضية التي يتم فحصها عينة من هذا المجتمع. ويتوصل الفاحصون إلى استنتاجات حول العينة ويعمّمونها على المجتمع كله.

تصميم الدراسة المسحية: تُعدّ **العينة** جزءًا من مجموعة أكبر تُسمى **المجتمع**. وحيث إن فحص كل عنصر في المجتمع أمر غير عملي، يتم اختيار عينة لتمثل هذا المجتمع. وبعد تحليل النتائج الخاصة بالعينة يمكن التوصل إلى استنتاجات حول المجتمع كاملاً. وكلما كان حجم العينة أكبر أو استعملت عينات أكثر كانت النتائج أكثر تمثيلاً للمجتمع.

وللتوصل إلى استنتاجات صحيحة من البيانات التي تجمع من العينة، تحتاج أن تحدد أولاً أفضل أسلوب لجمع البيانات.

فيما سبق

درست تنظيم البيانات باستعمال الجداول التكرارية.

والآن

- أصمّم دراسة مسحية.
- أعرّف الطرق المختلفة لاختيار العينة.

المفردات

العينة

المجتمع

الدراسة المسحية

الدراسة القائمة على

الملاحظة

التجربة

العينة المتحيزة

العينة العشوائية

العينة العشوائية البسيطة

العينة العشوائية الطبقية

العينة العشوائية المنتظمة

أضف إلى

مطوياتك

مفهوم أساسي

أساليب جمع البيانات

الأسلوب	التعريف / الاستعمال	مثال
الدراسة المسحية	- تؤخذ البيانات من استجابات أفراد عينة من المجتمع. - للتوصل إلى استنتاجات عامة حول المجتمع.	لتحديد درجة رضا طلاب مدرسة عن فقرات الإذاعة المدرسية الصباحية يسأل مشرف الإذاعة عينة من ٥٠ طالباً عن رأيهم في فقرات الإذاعة.
الدراسة القائمة على الملاحظة	- تسجيل البيانات بعد ملاحظة أو مشاهدة العينة. - لمقارنة ردود الأفعال والتوصل إلى استنتاجات حول استجابات المجتمع.	تراقب شركة لصناعة الدمى بعض الأطفال وهم يلعبون، وتلاحظ نوع الدمى التي يفضلونها أكثر. ويستنتجون من ذلك أن الأطفال في عمر السنتين يفضلون الدمى التي تصدر أصواتاً على تلك التي لا تصدر أصواتاً.
التجربة	- تُسجّل البيانات بعد تغيير العينة. - للتوصل إلى استنتاجات عامة حول ما يمكن أن يحدث خلال حادثة ما.	يقوم مراقب ضبط الجودة بتشغيل آلة بسرعة معينة عشر مرات، فإذا وجد أن المنتج يكون معيباً في كل مرة فإنه يستنتج أن المنتج سيكون معيباً في كل مرة تدور فيها الآلة بهذه السرعة.

إحصاء السكان هو مسح لجميع أفراد المجتمع. لذا لا تستعمل الإحصاءات السكانية أسلوب العينة، وقد أجري آخر إحصاء في المملكة عام ٢٠١٧م.

مثال ١

تصنيف أساليب جمع البيانات

تبرّع: ترغب جمعية خيرية في معرفة مدى رغبة الناس في تقديم التبرعات للجمعيات الخيرية. فوزّعت ١٠٠٠ استبانة على سكان أحد الأحياء.

(أ) حدّد العينة والمجتمع الذي اختيرت منه.

العينة: الأشخاص الذين تسلموا الاستبانة، وعددهم ١٠٠٠ شخص.

أما المجتمع: فجميع سكان ذلك الحي.

(ب) صنّف أسلوب جمع البيانات الذي استعملته هذه الجمعية.

هذا هو أسلوب الدراسة المسحية، حيث تؤخذ البيانات من استجابات أفراد العينة نحو الاستبانة.

تحقق من فهمك

حدّد العينة والمجتمع الذي اختيرت منه، ثم صنّف أسلوب جمع البيانات المستعمل في كلٍّ مما يلي:



(أ١) **بحوث:** قامت مؤسسة للبحوث العلمية بتحليل ردود أفعال مجموعتين من الفئران تجاه السكر.

(ب١) **إعادة التدوير:** يرغب مجلس بلدي في أن يبدأ بمشروع إعادة تدوير، فأرسل لمجموعة من السكان اختيروا عشوائياً ١٠٠٠ استبانة تضمنت سؤالاً حول المواد التي يرغبون في إعادة تدويرها.

هناك عوامل تؤثر في جمع البيانات والاستنتاجات التي يتم التوصل إليها. فإذا كانت طريقة اختيار العينة تعطي تفضيلاً لمجموعة معينة على مجموعة أخرى فإن العينة تكون **عينة متحيزة**، والبيانات المأخوذة منها متحيزة، وتكون العينة غير متحيزة إذا كان لكل فرد منها الاحتمال نفسه في الاختيار، وتُسمى **عينة عشوائية**.

مثال ٢

تحديد تحيز العينة

حدّد في كلٍّ مما يأتي إن كانت العينة متحيزة أم غير متحيزة، وفسّر إجابتك:

(أ) **فضائيات:** سُئل كل خامس شخص يدخل إلى متجر عن القناة الفضائية التي يفضلها.

غير متحيزة؛ لأن هذه العينة تتكون من أشخاص اختيروا عشوائياً.

(ب) **هوايات:** سُئل كل خامس شخص يدخل مكتبة عن هوايته المفضلة.

متحيزة؛ لأن الهواية الأكثر تفضيلاً للأشخاص الموجودين في المكتبة هي المطالعة.

تحقق من فهمك

(أ٢) **مدرسة:** سُئل كل عاشر طالب يدخل المدرسة عن المادة الدراسية المفضلة لديه.

(ب٢) **مطاعم:** يريد مدير مطعم أن يتحقق من أن العاملين يخدمون الزبائن بأسلوب جيد، فراقب أحد العاملين مدة ساعة في اليوم.



أساليب المعاينة: تُستعمل بيانات العينة لتقدير إحدى سمات المجتمع كاملاً. وتُختار العينة العشوائية من المجتمع على أن تكون ممثلة له دون إعطاء أفضلية لفئة معينة على أخرى. ويعرض الجدول الآتي ثلاثة أنواع من العينات العشوائية:

مفهوم أساسي		
العينات العشوائية		
النوع	التعريف	مثال
العينة العشوائية البسيطة	العينة التي لها فرصة الاختيار نفسها كأى عينة أخرى من المجتمع.	سحب أرقام مئة طالب من كيس، وإخضاع هؤلاء الطلاب لدراسة مسحية.
العينة العشوائية الطبقية	يقسم المجتمع إلى فئات متماثلة غير متداخلة، ثم يتم اختيار عينة من كل واحدة من هذه الفئات.	يختار الباحث عينات من صفوف مختلفة من الطلاب بناءً على النسبة المئوية لهذه الصفوف في المدرسة؛ ليعكس التنوع في صفوف المدرسة.
العينة العشوائية المنتظمة	العينة التي يُختار أفرادها تبعاً لفترة زمنية محددة، أو فئة محددة من العناصر.	تُفحص قطعة من خط إنتاج كل عشر دقائق، أو تُفحص قطعة من كل ٥٠ قطعة.

مثال ٣ تصنيف العينات العشوائية

حديقة الحيوانات: وزّعت الحيوانات في إحدى الحدائق إلى مجموعات تبعاً لموطنها، ثم اختير زوج من كل مجموعة بصورة عشوائية لفحص دمه.

(أ) حدّد العينة والمجتمع الذي اختيرت منه.

تتكون العينة من أزواج الحيوانات التي تم اختيارها من كل مجموعة. والمجتمع هو جميع الحيوانات الموجودة في الحديقة.

(ب) صنّف العينة إلى بسيطة أو طبقية أو منتظمة، وفسّر إجابتك.

هذه العينة طبقية؛ حيث قُسمت الحيوانات إلى فئات قبل الاختيار العشوائي.

تحقق من فهمك

حدّد في كل مما يأتي العينة والمجتمع الذي اختيرت منه، ثم صنّف العينة إلى بسيطة أو طبقية أو منتظمة، وفسّر إجابتك:

(١٣) **مستشفى:** اعتماداً على المعلومات المبينة إلى اليمين، وفي ندوة تعريفية، يتم اختيار طبيب من كل قسم عشوائياً ليقدم نبذة عن الخدمات التي يوفرها المستشفى في قسمه.

(٣ب) **طعام:** يفحص المدير في أحد المطاعم جودة الفطائر كل ٢٠ دقيقة بدءاً بوقت يُحدّد عشوائياً.

(٣ج) **احتفالات:** تلصق نجمة في أحد الاحتفالات أسفل ثلاثة أطباق، وتقدم هدايا للضيوف الذين تكون هذه الأطباق من نصيبهم.



الرابط مع الحياة

افتتح مستشفى الدمام المركزي عام ١٣٨٣هـ بسعة ٥٠ سريراً، واستمر في التطور وزيادة الأقسام والعيادات حتى أصبح مجمّعاً طبياً متكاملًا باسم مجمع الدمام الطبي، يقدم خدماته إلى سكان مدينة الدمام والمنطقة الشرقية من المملكة.

مثال ١

حدّد في كل مما يأتي العينة والمجتمع الذي اختيرت منه، ثم صنف أسلوب جمع البيانات المستعمل:

- (١) **مجالات:** يريد القائمون على إعداد مجلة المدرسة اختيار تصميم لغلافها من بين خمسة تصاميم؛ لذا فقد اختير عشرة من طلاب المدرسة عشوائياً للالتقاء من بين هذه التصاميم.
- (٢) **رياضة:** يريد مدير نادٍ رياضي أن يحدّد شعاراً للنادي، فسأل ١٠٠ شخص من مشجعي النادي اختيروا عشوائياً عن آرائهم.

مثال ٢

حدّد في كل مما يأتي إن كانت العينة متحيزة أم غير متحيزة، وفسر إجابتك:

- (٣) **هوايات:** يقف عدد من الطلاب عند مدخل المدرسة ويسألون كل عاشر طالب يدخلها عن هوايته المفضلة.

- (٤) **تسوق:** سُئل كل خامس عشر متسوّق في متجر ملابس عن نوع الهدية التي يودّ أن تُقدّم له.

مثال ٣

حدّد في كل مما يأتي العينة والمجتمع الذي اختيرت منه، ثم صنف العينة إلى بسيطة أو طبقية أو منتظمة، مفسراً إجابتك:

- (٥) **بطاقات مصوّرة:** وزّع أحمد بطاقات الصور التي التقطها في مجموعات بحسب المدن التي تمثّلها هذه البطاقات، ثم اختار بطاقتين عشوائياً من كل مجموعة.

- (٦) **تلفزة:** تود محطة تلفزة أن تحدد أكثر برامجها مشاهدة، فأرسلت استبانةً إلى عدة أشخاص اختيروا عشوائياً من أنحاء المملكة كافة.

تدرب وحل المسائل

مثال ١

عيّن فيما يأتي العينة والمجتمع الذي اختيرت منه، ثم صنف أسلوب جمع البيانات المستعمل:

- (٧) **صحف:** يريد محل بيع صحف أن يعرف عدد النسخ التي يطلبها من كل صحيفة يومية، فأرسل رسائل إلى جميع بيوت أحد الأحياء يسألهم فيها عن الصحيفة التي يطالعونها.
- (٨) **رحلات:** سألت وكالة سياحية جميع زبائنها الذين تعاملوا معها خلال السنتين الماضيتين عن الأماكن الأكثر تفضيلاً والأقل تفضيلاً.

مثال ٢

حدّد في كل مما يأتي إن كانت كل العينة متحيزة أم غير متحيزة، وفسر إجابتك:

- (٩) **مكتبة:** سأل أمين مكتبة كل من يستعير كتاباً إن كان يستعمل الحاسب الموجود في المكتبة.

- (١٠) **ملابس:** يُعطي محل بيع ملابس كل زبون بطاقة يمكنه أن يعيدها بالبريد، يسأله فيها عن نوع الثياب التي يفضّلها.

مثال ٣

حدّد في كل مما يأتي العينة والمجتمع الذي اختيرت منه، ثم صنف العينة إلى بسيطة أو طبقية أو منتظمة، وفسر إجابتك:

- (١١) **توظيف:** صنّفت شركة طلبات التوظيف لديها في مجموعات بحسب مناطق سكن مقدميها، ليتم فرزها لاختيار طلبات الشباب.

- (١٢) **تسوق:** يقدم مركز تجاري هدية للزبون رقم ٥٠ من بين كل خمسين زبوناً.





الرّبط مع الحياة

حمل الحقيبة المدرسية بطريقة صحيحة يجعل الظهر مشدوداً، ولا يسبب تقوّس العمود الفقري، بشرط توزيع ثقلها على الكتفين، ووجود مسند مناسب له على الظهر، وعدم تحميلها بأشياء كثيرة وغير ضرورية، وألاً تتعدّى كتلتها الإجمالية ١٠٪ من كتلة الطالب.

- (١٣) **حقائب:** أجرت شركة لصناعة الحقائب دراسة على زبائنها حول تصميم الحقيبة، وذلك عن طريق تسجيل شكل ولون الحقيبة التي يشتريها الزبون.
- (أ) حدّد العينة، والمجتمع الذي اختيرت منه.
- (ب) صنّف أسلوب جمع البيانات المستعمل.
- (ج) هل العينة متحيزة أم غير متحيزة؟ فسّر إجابتك.
- (د) إذا كانت غير متحيزة فصنّفها إلى بسيطة أو طبقية أو منتظمة.

- (١٤) **تمثيلات متعددة:** سوف تقوم في هذه المسألة بتصميم وتنفيذ دراسة مسحية خاصة بك.
- (أ) **كتائباً:** اكتب سؤالاً ذا معنى تريد إجابته من خلال دراسة مسحية، ثم صف الطريقة التي ستستعملها في جمع البيانات، وشرح سبب اختيارك إياها.
- (ب) **تحليلياً:** صمم طريقة لتنفيذ دراستك باستعمال عينة غير متحيزة. فسّر سبب اختيارك للعينة.
- (ج) **تطبيقياً:** نفّذ دراستك.
- (د) **جدولياً:** سجّل نتائج الدراسة في جدول.
- (هـ) **بيانياً:** استعمل التمثيل البياني (بالخطوط، أو بالقطاعات الدائرية، أو بالمدرج التكراري)، أو أي طريقة بصرية أو بيانية؛ لعرض نتائج الدراسة على طلاب الصف.

مسائل مهارات التفكير العليا

- (١٥) **تبرير:** قارن بين أوجه شبه وأوجه اختلاف أساليب جمع البيانات الثلاثة التي عرّضها الدرس.
- (١٦) **مسألة مفتوحة:** صف مثلاً من واقع الحياة لدراسة قائمة على الملاحظة.
- (١٧) **اكتب:** فسّر أهمية الدراسات المسحية المضبوطة للشركات، وكيف يمكن للشركات استعمالها.

تدريب على اختبار

- (١٨) **إجابة قصيرة:** تزيد فترة الاحتراق الأولى لصاروخ مقدار ٢٨ ثانية على الفترة الثانية. فإذا كانت مدة الاحتراق كاملة ١٥٢ ثانية فكم ثانية مدة الفترة الأولى؟
- (١٩) **هندسة:** ثني سلك طوله ٤٢ ستمتراً ليكون مستطيلاً طوله يساوي مثلي عرضه. أوجد بُعدي المستطيل.
- (أ) ٥ سم، ١٢ سم (ب) ٧ سم، ١٤ سم (ج) ٩ سم، ١٦ سم (د) ١١ سم، ١٨ سم

مراجعة تراكمية



٣ - ١

- (٢٠) **هندسة:** إذا كانت مساحة المستطيل المجاور ٦ س + ١٩ س - ٧ وحدة مربعة، فما عرضه؟ (مهارة سابقة)

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

- (٢١) **علوم طبيعية:** في تجربة إلقاء جسم من ارتفاع ٥ م، قام الطلاب بتسجيل ارتفاع الجسم عن الأرض، والزمن الذي استغرقه، فكانت كالاتي: (مهارة سابقة)

الزمن (ثانية)	٠	٠,٢	٠,٤	٠,٦	٠,٨	١
الارتفاع (سم)	٥٠٠	٤٨٠	٤٢٢	٣٢٤	١٨٦	١٠

مثّل العلاقة بين ارتفاع الجسم والزمن بيانياً.



تحليل نتائج الدراسة المسحية

لماذا؟

رابط الدرس الرقمي



www.ien.edu.sa



ترغب الشركات عادة في استعمال الدراسات المسحية للحصول على تغذية راجعة حول أدائها في مجالات عملها بدءاً من المبيعات وانتهاءً بمواقعها الإلكترونية. وقد حصلت شركة على النتائج المبينة في الشكل المجاور في استطلاع حول موقعها الإلكتروني. ماذا تعني هذه القيم؟ وما الطريقة التي جمعت بها هذه البيانات؟ وهل تمثل العينة زبائن الشركة بدقة؟

تلخيص نتائج الدراسة المسحية: بعد جمع البيانات من الدراسة المسحية، فإنها تحتاج إلى تلخيصها كي تكون ذات معنى. ويمكن تلخيص بيانات الدراسات المسحية باستعمال **مقاييس النزعة المركزية**.

فيما سبق

درست تصميم الدراسات المسحية.

والآن

- أخلص نتائج الدراسة المسحية.
- أقوم نتائج الدراسة المسحية.

المفردات

مقاييس النزعة المركزية

البيانات الكمية

البيانات النوعية

ملخص المفهوم

مقاييس النزعة المركزية

التنوع	الوصف	متى يفضل استعماله؟
المتوسط الحسابي	مجموع البيانات مقسوماً على عددها.	عندما لا توجد قيم متطرفة في مجموعة البيانات.
الوسيط	العدد الأوسط أو متوسط العددين الأوسطين في البيانات المرتبة.	عندما توجد قيم متطرفة في مجموعة البيانات ولكن لا توجد فجوات كبيرة في وسط البيانات.
المنوال	العدد أو الأعداد الأكثر تكراراً في مجموعة البيانات.	عندما توجد أعداد متكررة في مجموعة البيانات.

بعض البيانات لا يمكن تحليلها باستعمال الطرق الإحصائية، لكن **البيانات الكمية** التي تُعطى بصورة قيم عددية يمكن تحليلها. مثل درجات الاختبارات أو ساعات الدراسة، أو كتل الأجسام، بينما **البيانات النوعية** لا يمكن أن تأخذ قيمة عددية، ومن أمثلتها: الجنس أو الجنسية أو البرنامج التلفزيوني المفضل. ويمكن أحياناً أن تكون البيانات كمية ولا نستطيع أن نجد مقاييس النزعة المركزية، ويحدث هذا عندما تمثل البيانات أشياء مختلفة؛ أي لا تكون الأعداد أو النسب لنفسه.

مثال ١

اختيار طريقة تلخيص البيانات

أي مقاييس النزعة المركزية (إن وجدت) هو الأنسب لتمثيل البيانات في كل مما يأتي؟ برّر إجابتك، ثم احسب قيمة ذلك المقياس:

الخضراوات	السعرات	الخضراوات	السعرات
بصل أخضر	١٤	قرنبيط	١٠
فاصولياء	٣٠	خيار	١٧
فلفل	٢٠	ذرة	٦٦
بادنجان	٢٥	خس	٩
ملفوف	١٧	سبانخ	٩
جزر	٢٨	كوسا	١٧

(أ) **تغذية:** يبين الجدول المجاور السعرات

الحرارية في الطبق لكل نوع من الخضراوات. رتب هذه القيم تصاعدياً: ٩، ٩، ١٠، ١٤، ١٧، ١٧، ٢٠، ٢٥، ٢٨، ٣٠، ٦٦.

تلاحظ وجود قيمة أكبر كثيراً من سائر القيم وهي ٦٦، ولا توجد فجوة كبيرة في وسط البيانات. وهناك مجموعتان فقط من الأعداد

المتماثلة؛ لذا فالوسيط هو المقياس الأنسب لتمثيل هذه البيانات.

{٩، ٩، ١٠، ١٤، ١٧، ١٧، ٢٠، ٢٥، ٢٨، ٣٠، ٦٦}

الوسيط ١٧ سعراً.



النسبة المئوية	الاستجابة
٨	٣ سنوات على الأقل
١٥	سنة إلى أقل من ٣ سنوات
٤٥	٦ شهور إلى أقل من سنة
٣٢	أقل من ٦ شهور

(ب) **عمر:** أجرت وكالة سفريات دراسة مسحية على ١٠٠٠ شخص حول الزمن الذي مضى على آخر عُمرة لكل منهم والنتائج يوضحها الجدول المجاور.

لا يمكن حساب مقياس نزعة مركزية لهذه المجموعة من البيانات؛ لأن كل نسبة مئوية في الجدول تمثل شيئاً مختلفاً.

فعلى سبيل المثال، أجاب ١٥٪ من الأشخاص بأنه قد مضى من سنة إلى أقل من ٣ سنوات على أدائهم العمرة، بينما ذكر ٣٢٪ منهم أنهم أدوا آخر عمرة قبل أقل من ٦ شهور. فالوسيط لهذه البيانات وهو ٥, ٢٣٪ ليس له أي معنى في هذه الحال.

تحقق من فهمك

عدد الزبائن	٨٦	٧١	٧٩	٨٦
٨٦	٧٩	٣٢	٨٨	٧٩
٧٠	٧١	٦٩	٨٢	٨٦
٨٦	٨١	٨٥	٨٦	٨٦

(أ) **تسوق:** سجّل أحد محال بيع الأجهزة الإلكترونية عدد الزبائن في كل ساعة عمل في أحد الأيام كما هو موضح في الجدول المجاور.

(ب) **كتب:** في دراسة مسحية لمصادر أبحاث عدد من طلاب الصف الثالث المتوسط في إحدى المناطق التعليمية كانت الاستجابات على النحو الآتي: من المعلم: ٤٢٠؛ من مكتبة المدرسة: ١٣٢٠؛ من المكتبة العامة: ١٠٢٠؛ من متاجر الكتب: ١٠٢٠؛ من المكتبة المنزلية: ٧٢٠؛ من الإنترنت: ٥٤٠؛ من الأصدقاء: ٥٤٠.

تقويم نتائج الدراسات المسحية: بعد تنفيذ الدراسة المسحية يتم تلخيص البيانات، ويُعد تقرير حول نتائج الدراسة واستنتاجاتها. ومع ذلك فقد يؤدي التحيز أحياناً إلى أخطاء في البيانات فضلاً عن أخطاء في طريقة تفسيرها وفي التقرير المكتوب عنها؛ لذا يجب أن تكون قادراً على الحكم على مصداقية هذه التقارير من خلال التحقق من أن العينة عشوائية وكبيرة وممثلة للمجتمع تمثيلاً جيداً، وأن مصدر البيانات موثوق به. وغالباً ما تقدم الصحف اليومية والمجلات والتقارير المتلفزة نتائج دراسات مسحية، تحتاج إلى الحكم على مصداقيتها قبل اتخاذ قرار يعتمد عليها، ويمكن أن تطرح بعض الأسئلة على نفسك من أجل ذلك مثل:

- ما مجتمع الدراسة؟ وما العينات المختارة منه؟ وهل أستطيع تحديدها بسهولة؟ وهل هي متحيزة؟
- ما مصدر البيانات؟ وهل هو موثوق به؟ وهل يمكن أن يكون متحيزاً؟
- هل تدعم البيانات الاستنتاجات فعلياً؟

تنبيه

النسبة المئوية

تحقق دائماً من أن الدراسة المسحية التي تعطي بياناتها على صورة نسب مئوية تدل على حجم العينة.

مثال ٢ تقويم دراسة مسحية

كتاب الجامعة السنوي: إذا كان الجدول المجاور يمثل نتائج تقرير دراسة مسحية، فحدّد صحة المعلومات والاستنتاجات.

النتائج	الاختبار
الاستجابة	الاختبار
٦٧٪	إلكترونيًا فقط
٢٢٪	ورقيًا فقط
٩٪	إلكترونيًا وورقيًا
٢٪	لا تفضيل

السؤال: هل يجب أن تعدّ الجامعة كتابها السنوي إلكترونيًا هذا العام؟

العينة: وضعت استبانات على مقاعد الطلاب بصورة عشوائية. الاستنتاج: يجب أن تعدّ الجامعة هذا العام الكتاب السنوي إلكترونيًا فقط.

ذكر التقرير أن اختبار الطلاب كان عشوائياً، ولم يذكر عددهم، كما أن النتائج أعطيت بنسب مئوية؛ فالنسبة ٦٧٪ قد تعني ٣٤ من ٥٠، وهذه ليست عينة كافية لتمثل جامعة كبيرة.

تحقق من فهمك



النتائج	
الاختيار	الاستجابة
معقولة جداً	٥٦
معقولة	١٨٥
معقولة نوعاً ما	١٣٢
غير معقولة	٦٩
غير معقولة أبداً	٥٨

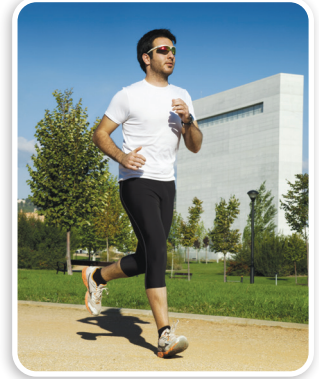
(٢) **مدينة ألعاب:** إذا كان الجدول المجاور يمثل نتائج تقرير دراسة مسحية حيث طلب من كل عاشر زائر من بين ٥٠٠٠ زائر لمدينة ألعاب في أحد الأيام أن يجيب عن سؤال الاستبانة الآتي:
السؤال: هل ترى أن أسعار بطاقات الدخول لمدينة الألعاب معقولة؟
الاستنتاج: أسعار التذاكر معقولة، ويجب أن تبقى كما هي.

النتائج	
الاختيار	الاستجابة
توظيف وسائل التواصل الاجتماعي	٢٥٪
توزيع النشرات والمطويات	٥٪
إقامة قوافل تثقيفية من قبل المدرسة	٣٠٪
حضور فريق من لجنة مكافحة المخدرات	٤٠٪

(٣) **التوعية بخطر المخدرات:** يمثل الجدول التالي بيانات دراسة مسحية، حيث أرسلت الاستبانات بصورة عشوائية إلكترونيًا، إلى جميع طلاب المرحلة المتوسطة، عبر منصة مدرستي. حدّد صحّة الاستنتاجات الآتية:
هدفت الدراسة إلى الإجابة عن السؤال: هل يجب أن تعدّ المدرسة قوافل تثقيفية؛ للتعريف بمشكلة المخدرات ومخاطرها المترتبة عليها؟ عيّنة الدراسة هي: طلاب الصف الثالث المتوسط.
نتيجة الدراسة هي: يفضل الطلاب حضور فريق من لجنة مكافحة المخدرات؛ لتوعيتهم بأضرار المخدرات.



- يمكن أن تؤثر طريقة عرض نتائج الدراسة المسحية في طريقة تفسير نتائجها. وهذه بعض العوامل المؤثرة:
- إذا كانت أطوال فترات التدرّج في التمثيل البياني بالخطوط أو بالأعمدة أو بالمدّجات التكرارية كبيرة، فإن التغيرات تبدو بسيطة على الرغم من أنها قد تكون حقيقة مهمة. أما إذا كانت أطوال الفترات قصيرة، فإنها ستضخم التغيرات الطفيفة في التمثيل البياني.
- وهذه بعض خصائص تمثيل النتائج التي يمكن أن تؤثر في الاستنتاج:
- يجب أن تكون أطوال فترات التدرّج في التمثيل البياني ثابتة.
- قد يعطي استعمال النسب المئوية بدلاً من القيم الفعلية لمجموعة البيانات نتيجة مضلّلة، ومع هذا يُفضل استعمال النسب المئوية إذا كان حجم العينة كبيراً.
- يجب أن يكون لكل الأعمدة في التمثيل بالأعمدة أو المدرج التكراري العرض نفسه؛ فقد يؤدي تغيير عرض الأعمدة إلى تضخيم الاختلافات.
- عند تمثيل البيانات بالقطاعات الدائرية أو بالأعمدة أو المدرج التكراري بدرجات لون واحد مختلفة قد تختلط المجموعات بصرياً وتؤثر في طريقة تفسير النتائج.



الربط مع الحياة

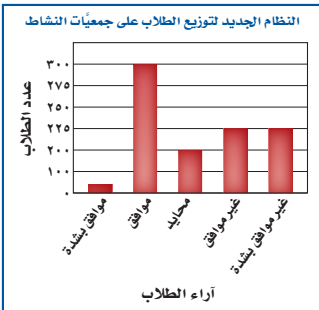
أثبتت الدراسات أن النشاط التربوي والحركي يزيد حيوية الطلاب ويشعّر رغبتهم، ويحسن العمليات العقلية، ويركّز انتباههم، ويزيد قدرتهم على التحصيل الدراسي والمشاركة والاندماج مع أقرانهم.

مثال ٣ نتائج مضللة

جمعيات النشاط: يفكر قائد مدرسة ثانوية كبيرة في تطبيق نظام جديد لتوزيع الطلاب على جمعيات النشاط، فوزّع استبانة على الطلاب يسألهم عن رأيهم في النظام الجديد.

السؤال: ما رأيك في تطبيق النظام الجديد لتوزيع الطلاب على جمعيات النشاط؟

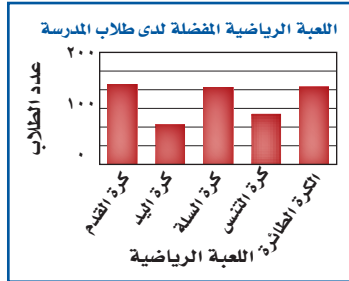
الاستنتاج: لن ينزعج الطلاب من تطبيق نظام توزيع الطلاب على جمعيات النشاط.



حدّد، إذا كان التمثيل بالأعمدة المجاور يعطي الصورة الصحيحة حول نتائج الدراسة المسحية.

يبدو للوهلة الأولى أن معظم الطلاب موافقون على تطبيق النظام الجديد، ومع ذلك فإن أطوال فترات التدريب غير ثابتة. وإذا ألقينا نظرة فاحصة نجد أن نحوًا من ٤٥٠ طالبًا غير موافقين أو غير موافقين بشدة على هذا النظام الجديد، وأن عدد الموافقين يزيد قليلًا على ٣٠٠ طالب فقط. لذا فإن التمثيل البياني المعروض مضلل، والاستنتاج غير صادق.

تحقق من فهمك



٤) يوضح التمثيل بالأعمدة المجاور نتائج استطلاع أجراه مدرس التربية الرياضية لمعرفة اللعبة الرياضية التي يفضلها طلاب المدرسة.

السؤال: ما اللعبة الرياضية التي تفضلها؟

الاستنتاج: كرة اليد هي اللعبة الأقل شيوعًا بين الألعاب الرياضية المفضلة.

حدّد ما إذا كان التمثيل بالأعمدة يقدم صورة صادقة أم لا لنتائج الدراسة المسحية. وفسّر إجابتك.

تأكد

مثال ١

أي مقاييس النزعة المركزية (إن وجدت) هو الأنسب لتمثيل البيانات في كل مما يأتي؟ برّر إجابتك، ثم احسب قيمة ذلك المقياس:

١) إعادة تدوير: ترغب شركة في إعادة تدوير الأوراق الزائدة، فجمعتها في رزم ارتفاع الواحدة منها ٥٠ سم، وقد أحصى خالد عدد الرزم في نهاية كل شهر من السنة فكانت: ١٥، ١٢، ١٤، ١٥، ١٨، ١٥، ١٣، ١٤، ١٣.

٢) سياحة: تريد إحدى وكالات السياحة التي تعمل عبر الإنترنت أن تنظم رحلات للعائلات، فأجرت مسحًا حول المكان المفضل لها لقضاء الإجازة. وقد كانت الأماكن الخمسة الأولى هي: الشواطئ ٢٥٪؛ المتنزهات ٢٢٪؛ البر ٢١٪؛ المواقع الأثرية التاريخية ١٧٪؛ الجبال ١٥٪.

مثال ٢

حدّد صحة المعلومات والاستنتاجات لتقرير كل دراسة مسحية فيما يأتي:

النتائج	
الاختيار	الاستجابة
رياضية	٢٦٪
دينية	٣٢٪
إخبارية	٣٩٪
تعليمية	٣٪

٣) تلفاز: إذا كان الجدول المجاور يمثل نتائج تقرير دراسة مسحية حيث تريد محطة تلفزيونية أن تغير نشاطها، فأرسلت ١٠٠٠ استبانة بالبريد إلى أشخاص تمّ اختيارهم عشوائيًا تقع ضمن منطقة بثها وتلقّت ٧٥٠ ردًا. السؤال: ما نوع البرامج التلفزيونية التي تفضلها؟ الاستنتاج: يجب أن تتحول المحطة إلى محطة إخبارية.

٤) رياضة: استطلعت إدارة التعليم في إحدى المناطق آراء ٣٥٨٥ طالبًا عن رياضتهم المفضلة.

السؤال: ما الرياضة التي تفضل المشاركة فيها؟

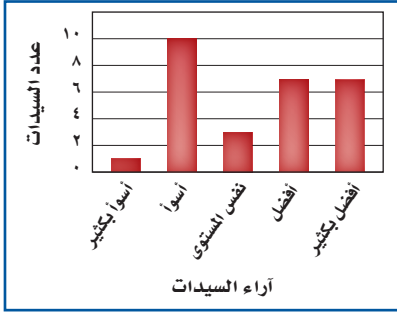
النتائج: كرة الطائرة ٢٧١، كرة القدم ٥٧٠، كرة السلة ٤٣٦، التايكوندو ٢٧٩، المصارعة ١٩٧، جري التتابع ٢٠٩، السباحة ٣١٩، الجمباز ١٩٧، كرة اليد ٢٨٩، التنس ٢٠٢، رياضات أخرى ٦١٦.

الاستنتاج: كرة القدم هي الرياضة التي يفضل الطلاب المشاركة فيها.



مثال ٣

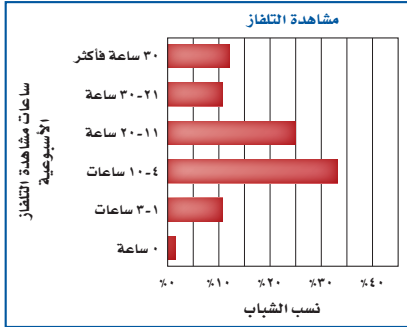
حدد إذا كان التمثيل بالأعمدة المجاور يعطي الصورة الصحيحة حول نتائج الدراسة المسحية.



(٥) **مسحوق غسيل:** وزعت عينات من مسحوق غسيل على مجموعة من السيدات لمقارنته بمسحوق الغسيل الذي يستخدمه.

السؤال: ما رأيك باستبدال مسحوقك القديم بالمسحوق الجديد

الاستنتاج: لن تستبدل معظم السيدات مسحوق الغسيل الذي يقمن باستعماله



(٦) **تلفاز:** أجرت شبكة إعلامية دراسة حول عدد الساعات التي يقضيها الشباب في مشاهدة التلفاز في الأسبوع الواحد، وعرضت النتائج بالتمثيل البياني المجاور.

تدرب وحل المسائل

مثال ١

أي مقياس النزعة المركزية (إن وجدت) هو الأنسب لتمثيل البيانات في كل مما يأتي؟ برّر إجابتك، ثم احسب قيمة ذلك المقياس:

(٧) **كتب:** أجرى متجر كتب مسحاً لمعرفة موضوع الكتب المفضلة لزيائنه، وكانت النتائج على النحو الآتي: الثقافية ٢١٪، القصص ١٩٪، المغامرات ١٢٪، العلمية ١٧٪، الدينية ١٨٪، التاريخية ١٣٪.

الأنشطة الصيفية			
السباحة	٦٥٠	المخيمات	٤٣٢
الرحلات	٨٨٥	المطالعة	٢٨١
الرياضة	١١٢٣	أخرى	٥١٤

(٨) **أنشطة صيفية:** أجريت دراسة حول الأنشطة الصيفية المفضلة التي يمارسها الطلاب، وعُرضت نتائجها في الجدول المجاور.

مثال ٢

حدّد صحة كلّ من المعلومات والاستنتاجات لتقرير كل دراسة مسحية فيما يأتي:

(٩) **قيادة:** أجرت صحيفة استطلاعاً شمل ٧٥٠ شخصاً من سكان إحدى المدن.

السؤال: هل تتحدث عبر الهاتف الجوّال في أثناء قيادة السيارة؟

النتائج: لا ٢٠٪، بضع مرات ٤٨٪، ٧، ٤٨٪؛ على الأكثر ١، ٥٪؛ دائماً ٥، ٢٥٪. الاستنتاج: سائقو هذه المدينة غير حريصين.

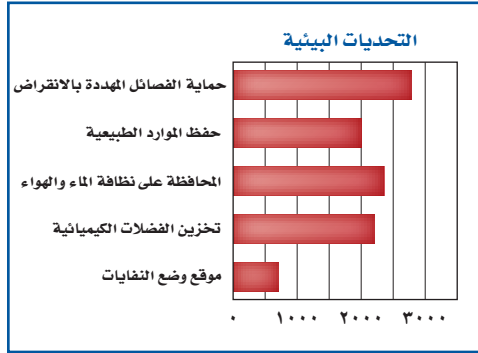
(١٠) **قراءة:** أجرت مجلة نسائية استطلاعاً طلبت فيه من الطلاب والطالبات ذكر سبب القراءة.

النتائج: للاستمتاع ٢٥٪، لتعلم أشياء جديدة ٢٤٪، لتلبية طلبات المدرسة ١٨٪، بسبب الملل وعدم وجود شيء آخر ١٧٪، لأن أصدقاءهم يحبون القراءة ويتحدثون عن الكتب ١٦٪.

الاستنتاج: يقرأ الطلاب والطالبات الكتب لأسباب متعددة.



حدّد ما إذا كانت طريقة تمثيل النتائج تعطي صورة صحيحة حول نتائج كلّ من الدراسات المسحية الآتية، وفّر إجابتك.



(١١) **بيئة:** التمثيل بالأعمدة المجاور يمثل نتائج إجراء مجلة بيئية دراسة مسحية شملت ١٠٠٠٠ شخص تم اختيارهم عشوائياً.

السؤال: ما التحدي البيئي الأكبر في القرن الحادي والعشرين؟

الاستنتاج: إيجاد مكان لوضع النفايات أمر غير مهم.

(١٢) **تدريبات السلامة:** يعقد الهلال الأحمر دورات في السلامة مخصّصة لطلاب المدارس المتوسطة والثانوية. سجّل ٧٤٪ من المشاركين في برنامج السلامة البحرية، ١٠٪ في برنامج رعاية الأطفال، ١٦٪ في برنامج الإسعافات الأولية.

السؤال: هل يجب أن يستمر الهلال الأحمر في طرح برنامج رعاية الأطفال؟ استعمل البيانات في كتابة استنتاج عن دورات السلامة.

(١٣) **تمثيلات متعددة:** سوف تستكشف في هذه المسألة طريقة أخرى لتحليل البيانات.

(أ) **حسيّاً:** تجد أدناه توزيعاً لقطع نقود في مجموعات غير متساوية. ضع قطع نقود على الطاولة في مجموعات مماثلة للصورة.



(ب) **بيانياً:** مثل هذه المجموعات بالنقاط، واكتب فوق كل عمود من النقاط الفرق بين عدد القطع في العمود والمتوسط الحسابي لعدد القطع في المجموعة الواحدة، ثم أوجد القيمة المطلقة لهذه الفروق.

(ج) **تحليلياً:** حرّك القطع لتجعل المجموعات متساوية، بحيث تحرك قطعة واحدة كل مرة، وتحرك القطعة مرة واحدة فقط، وعدّ الحركات. وضح مدى اختلاف المجموعات في الوضع الأصلي عنها في الوضع الجديد.

(د) **تحليلياً:** أوجد متوسط القيم المطلقة، وصف ما تمثّله هذه القيمة، ووضّح معناها في هذه الحالة.

مسائل مهارات التفكير العليا

(١٤) **تحدّد:** أوجد مجموعة من الأعداد يكون المتوسط الحسابي لها أكبر من الوسيط.

(١٥) **مسألة مفتوحة:** صف دراسة مسحية ترغب في أن تجريها. وحدّد العينة والمجتمع والأسئلة وكيفية عرض النتائج.

(١٦) **اكتب:** اشرح لماذا قد تعرض إحدى الشركات نتائج الدراسة المسحية بصورة غير دقيقة. وأعط مثلاً للطريقة التي يمكن أن يتم بها ذلك.



الربط مع الحياة

تعمل جمعية الهلال الأحمر السعودي على نقل المرضى والمصابين والجرحى، وتوفير الإسعافات العاجلة الطارئة، وعمل الدورات التدريبية في برامجها المختلفة، وتقديم الخدمات والمساعدات الطبية لحجاج بيت الله الحرام ورعايتهم صحياً.

تدريب على اختبار

١٨) إذا كانت ٥, ٤ كيلومترات تعادل ٨, ٢ ميل تقريباً، فكم ميلاً تقريباً يساوي ١, ٦ كيلومترات؟

- (أ) ٣, ٢ أميال (ب) ٣, ٦ أميال
(ج) ٣, ٨ أميال (د) ٤, ٠ أميال

١٧) إجابة قصيرة: بيعت ١٠٠٠ تذكرة في مهرجان. ثمن التذكرة ١٥ ريالاً للكبار، و٨ ريالاً للأطفال، فكانت حصيلة المبيعات ١٢٩٠٠ ريال، فما عدد تذاكر الأطفال المباعة؟

مراجعة تراكمية

١٩) **كتب:** للتحقق من جودة الكتب التي تتم طباعتها يتم فحص الكتاب الخمسين من كل خمسين كتاباً تُطبع في المطبعة. حدّد العينة والمجتمع الذي اختيرت منه، وهل هي متحيزة أم غير متحيزة؟ وإذا كانت غير متحيزة فصنّفها إلى بسيطة أو طبقية أو منتظمة. (الدرس ١٠-١)

في السؤالين ٢٠-٢١ افترض أن $\angle$ أ زاوية حادة في المثلث القائم أ ب ج، ثم أوجد: (الدرس ٩-٧)

٢٠) جتا أ، ظا أ إذا كان $\sin A = \frac{1}{4}$
٢١) جتا أ، جتا أ إذا كان $\tan A = \frac{5}{3}$

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

أوجد الوسط الحسابي، والوسيط والمنوال لكل مجموعة بيانات فيما يأتي، قرب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم:

٢٢) ١١٠، ١٠٠، ١٠٥، ١٠٠، ١٠٥، ١٠٠، ١١٠

٢٣) ٤٨، ٣١، ٢٧، ٤٢، ٣٥، ١٤، ٢٥، ١٢

٢٤) ٨٥، ٢٥، ٦٥، ٣٥، ٤٥، ٦٥، ٥٥





إحصائيات العينة ومعالم المجتمع

لماذا؟

في بداية حصة الرياضيات طلب المدرس من كل طالب في الصف سحب ٩ قطع نقدية عشوائياً من وعاء فيه ١٠٠٠ قطعة نقد من فئة النصف ريال، ثم إعادتها للوعاء بعد حساب متوسط تواريخ إصدار هذه العينة من قطع النقد.



ما وجه المقارنة بين متوسط تواريخ إصدار القطع التسع ومتوسط إصدار جميع القطع النقدية الألف الموجودة في الوعاء؟

إحصائيات العينة ومعالم المجتمع: تُستعمل في هذا الموقف

إحصائيات العينة للتوصل إلى استنتاجات حول المجتمع كاملاً. وهو ما يُسمى **الإحصاء الاستدلالي**. وفي الموقف المذكور أعلاه يسحب كل طالب عينة من قطع النقد من الوعاء، حيث تمثل قطع النقود الألف المجتمع. و**الإحصائي**: مقياس يصف إحدى خصائص العينة. أما **المُعَلِّمة** فهي مقياس يصف إحدى خصائص المجتمع. ويتم تقدير معالم المجتمع بناءً على إحصائيات عينة عشوائية ممثلة. وتتغير قيمة الإحصائي عادة من عينة إلى أخرى إلا أن معلمة المجتمع تبقى ثابتة؛ لأنها تمثل المجتمع كاملاً.

مثال ١ تعيين إحصائيات العينة ومعالم المجتمع

عين العينة والمجتمع في كل من المواقف الآتية، ثم صف إحصائي العينة ومُعَلِّمة المجتمع.

(أ) اختيرت عينة عشوائية من إحدى الجامعات مكوّنة من ٤٠ من طالبي المنح الدراسية، ثم حُسب متوسط درجاتهم.

العينة: مجموعة الطلاب الأربعة المتقدمين بطلبات المنح الدراسية.
المجتمع: جميع الطلاب طالبي المنح الدراسية.
إحصائي العينة: متوسط درجات الطلاب الأربعة.
مُعَلِّمة المجتمع: متوسط درجات جميع طالبي المنح الدراسية.

(ب) اختيرت عينة عشوائية طبقية من الممرضين العاملين في جميع مستشفيات المناطق الشرقية والغربية والوسطى، ثم حُسب وسيط رواتب هؤلاء الممرضين.

العينة: الممرضون الذين تم اختيارهم عشوائياً من جميع مستشفيات المناطق الثلاث.
المجتمع: جميع الممرضين العاملين في هذه المستشفيات في المناطق الثلاث.
إحصائي العينة: وسيط رواتب الممرضين في العينة.
مُعَلِّمة المجتمع: وسيط رواتب جميع الممرضين العاملين في جميع مستشفيات المناطق الثلاث.

تحقق من فهمك

(١) **أغذية:** يتم اختيار عبوة عشوائياً من خط إنتاج أحد الأغذية المحفوظة، ثم يؤخذ بدءاً من تلك العبوة، العبوات التي أرقامها من مضاعفات ٥٠، وتُدوّن كتلتها ويُحسب المنوال لعينة كتل الإنتاج اليومي.

فيما سبق

درست تنظيم نتائج الدراسة المسحية وتلخيصها.

والآن

- أستعمل إحصائيات العينة لتحليل نتائج الدراسة المسحية.
- أحلل البيانات باستعمال إحصائيات العينة.

المفردات

الإحصاء الاستدلالي

الإحصائي

المُعَلِّمة

البيانات الوحيدة المتغير

مقاييس التشتت

الانحراف المتوسط

الانحراف المعياري

التباين

التحليل الإحصائي: تُسمى البيانات التي تتضمن متغيرًا واحدًا **بيانات وحيدة المتغير**. ويمكن التعبير عن هذه البيانات بمقاييس النزعة المركزية مثل المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال. كما يمكن التعبير عنها أيضًا بمقاييس **التشتت** مثل المدى والربيعات والمدى الربيعي.

مفهوم أساسي مقاييس التشتت		
المقياس	الوصف	متى يفضل استعماله؟
المدى	الفرق بين أكبر وأصغر قيمة في مجموعة البيانات.	لوصف الأعداد التي تشملها مجموعة البيانات.
الربيعات	القيم التي تقسم مجموعة البيانات إلى أربعة أجزاء متساوية.	لتحديد القيم الواقعة في الجزء الأعلى أو الجزء الأسفل من مجموع البيانات.
المدى الربيعي	مدى النصف الأوسط من مجموعة البيانات؛ وهو الفرق بين الربيعين الأعلى والأدنى.	لتحديد القيم الواقعة في النصف الأوسط من مجموعة البيانات.

الانحراف المتوسط هو متوسط القيم المطلقة للفرق بين كل قيمة والمتوسط الحسابي لمجموعة البيانات. تذكر أن القيمة المطلقة لعدد معين هي بعده عن الصفر على خط الأعداد.

مفهوم أساسي الانحراف المتوسط	
الخطوة ١:	أوجد المتوسط الحسابي.
الخطوة ٢:	أوجد مجموع القيم المطلقة للفرق بين كل قيمة في مجموعة البيانات والمتوسط الحسابي.
الخطوة ٣:	اقسم هذا المجموع على عدد القيم في مجموعة البيانات.

مثال ٢ استعمال الانحراف المتوسط

قراءة: سأل معلم طلابه عن عدد الكتب التي يقرؤونها أسبوعيًا. وقد تلقى الإجابات الآتية: ٢، ٢، ٣، ٤، ١٤. أوجد الانحراف المتوسط لهذه البيانات مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة.

الخطوة ١: المتوسط الحسابي لهذه البيانات يساوي ٥

الخطوة ٢: أوجد مجموع القيم المطلقة للفرق بين كل قيمة والمتوسط الحسابي.

$$18 = 9 + 1 + 2 + 3 + 3 = |5 - 14| + |5 - 4| + |5 - 3| + |5 - 2| + |5 - 2|$$

الخطوة ٣: اقسم المجموع على عدد القيم: $5 \div 18 = 3, 6$

تحقق من فهمك

٢) تسويق: رصد موزع عدد صناديق العصير اليومية التي بيعت فكانت: ١٢، ٣٢، ٣٦، ٤١، ٢٢، ٤٧، ٥١، ٣٣، ٣٧، ٤٩. أوجد الانحراف المتوسط لهذه البيانات.

الانحراف المعياري هو القيمة التي تُحسب لتدل على مدى تباعد قيم مجموعة البيانات عن متوسطها الحسابي. ويُرمز إليه بالرمز "ع". أما **تباين** مجموعة من البيانات فهو مربع الانحراف المعياري لتلك البيانات.



الربط مع الحياة

تؤكد الدراسات على أهمية قراءة الشباب للكتب المناسبة لمراحلهم العمرية، حيث تساهم في بناء معارفهم وتوسيع مداركهم، وتدريبهم على مهارات التواصل، وتنمي قدراتهم الإبداعية.

استعمل الطريقة المبينة أدناه لحساب التباين والانحراف المعياري.

إرشادات للدراسة

رموز

يحسب المتوسط الحسابي للعينة وللمجتمع بالطريقة نفسها. وفي العادة يُرمز إلى متوسط العينة بالرمز $\bar{x}$ ، ولكن سوف يستعمل هذا الرمز في هذا الكتاب ليدل على متوسط المجتمع.

أضف إلى
مطوياتك

ملخص المفهوم التباين والانحراف المعياري

- الخطوة ١:** أوجد المتوسط الحسابي $\bar{x}$.
- الخطوة ٢:** أوجد مربع الفرق بين كل قيمة في مجموعة البيانات والمتوسط الحسابي، ثم اجمع هذه المربعات، واقسم المجموع على عدد القيم في مجموعة البيانات لتحصل على التباين.
- الخطوة ٣:** أوجد الانحراف المعياري بإيجاد الجذر التربيعي للتباين.

مثال ٣ إيجاد التباين والانحراف المعياري

أوجد المتوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة للأعداد ١٣، ١٢، ١١، ٦، ٣.

الخطوة ١: لإيجاد المتوسط الحسابي اجمع قيم البيانات، ثم اقسم المجموع على عددها.

$$\bar{x} = \frac{13 + 12 + 11 + 6 + 3}{5} = \frac{45}{5} = 9$$

الخطوة ٢: لإيجاد التباين أوجد مربع الفرق بين كل قيمة والمتوسط الحسابي، ثم اجمع هذه المربعات، واقسم المجموع على عدد القيم.

$$s^2 = \frac{2(9 - 13)^2 + 2(9 - 12)^2 + 2(9 - 11)^2 + 2(9 - 6)^2 + 2(9 - 3)^2}{5}$$

$$= \frac{2(4) + 2(9) + 2(4) + 2(9) + 2(36)}{5}$$

$$= \frac{74}{5} = \frac{16 + 9 + 4 + 9 + 36}{5}$$

الخطوة ٣: الانحراف المعياري يساوي الجذر التربيعي للتباين.

$$s = \sqrt{\frac{74}{5}} = \sqrt{14.8}$$

أوجد الجذر التربيعي لكلا الطرفين

استعمل الحاسبة

$$s \approx 3.8$$

إذن المتوسط الحسابي ٩، والتباين $\frac{74}{5}$ ، والانحراف المعياري ٣.٨ تقريباً.

تحقق من فهمك

أوجد المتوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة لكلٍّ من مجموعتي البيانات الآتيتين:

٣ (ب) ٩٢، ٨٤، ٧١، ٨٣، ١٠٠

١٣ (أ) ٦، ١٠، ١٥، ١١، ٨

إرشادات للدراسة

فئات البيانات

تُسمى البيانات الكمية باسم البيانات الناتجة عن القياس، وتُسمى البيانات النوعية باسم البيانات التصنيفية.



يمكن تفسير مدى انتشار البيانات من خلال الانحراف المعياري. فعلى سبيل المثال، إذا كان المتوسط الحسابي ٧٥، والانحراف المعياري ٣، فإن معظم قيم البيانات قريبة جداً من المتوسط الحسابي، أما إذا كان المتوسط الحسابي ٧٥، والانحراف المعياري ١٥، فإن هذه البيانات متباعدة ومنتشرة على مدى أوسع، وقد يكون من بينها قيم متطرفة.

مثال ٤ من واقع الحياة التحليل الإحصائي

تغذية: يسجل خالد عدد السعرات الحرارية التي يتناولها كل يوم. أوجد الانحراف المعياري مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة لمجموعة البيانات الآتية:

اليوم	السبت	الأحد	الاثنين	الثلاثاء	الأربعاء	الخميس	الجمعة
عدد السعرات	١٨٠٠	٢٠٠٠	٢١٠٠	٢٢٥٠	١٩٠٠	٢٥٠٠	٢٠٠٠

1	2	3	4	5	6
X					
2000	X				
2100	Σx				
2250	Σx^2				
1900	$\Sigma x := \Sigma n \dots$				
2500	$\sigma x := \sigma n x \dots$				

استعمل الآلة الحاسبة البيانية لإيجاد الانحراف المعياري. واضغط على المفاتيح   ثم أدخل كل قيمة من قيم البيانات في القائمة مع الضغط على  بعد إدخال كل قيمة. ولإظهار قيمة الانحراف المعياري على الشاشة اضغط بالترتيب

menu 4:Statistics 1:Stat Calculations 1:One-Variable Statistics...

فيكون الانحراف المعياري ٩, ٢١٦ تقريباً.

تحقق من فهمك

(٤) رصد خالد استهلاكه من السعرات خلال أسبوع آخر فكان:

١٩٥٠، ٢٠٠٠، ٢١٠٠، ٢٠٠٠، ١٩٠٠، ٢١٠٠، ٢٥٠٠، ٢٠٠٠

أوجد الانحراف المعياري لاستهلاكه من السعرات في هذا الأسبوع.

تأكد

مثال ١

عين العينة والمجتمع في كل من الموقفين الآتين، ثم صف إحصائي العينة ومعلمة المجتمع:

(١) **تعليم:** اختيرت عينة عشوائية من ١٠٠٣ طلاب من الصف الثالث الثانوي في المدارس الثانوية في جدة، وسُئِلوا إن كانوا راغبين في دراسة الهندسة بالجامعة، ثم حُسبت النسبة المئوية للذين كانت إجاباتهم "نعم".

(٢) **كتب:** أُجريت دراسة شملت عينة مكونة من ١٠٠٠ طالب في الجامعات السعودية حول المبالغ التي ينفقونها في شراء الكتب الإضافية في كل عام، ثم حُسب المتوسط الحسابي لهذه المبالغ.

مثال ٢

(٣) **عمل إضافي:** أحصى مدير أحد المصانع عدد ساعات العمل الإضافي لعمال أحد الأقسام في الأسبوع فكانت: ١٠، ١٢، ١٠، ١٢، ١٥، ٩، ١٠، ١١، ٢٠. أوجد الانحراف المتوسط لهذه البيانات مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة.



أوجد المتوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة لكلٍّ من مجموعتي البيانات الآتيتين:

مثال ٣

(٥) ٢١، ١٨، ١٥، ١٢

(٤) ١٧، ٢١، ١٨، ٤، ٣

(٦) **إلكترونيات:** أجرى محمود مسحاً لعدد الأجهزة الإلكترونية الموجودة في منزل كل واحد من زملائه في الفصل فكانت إجاباتهم: ٣، ١٠، ١١، ٩، ١١، ١٢، ٨، ١١، ٧، ١٢، ١١، ١١، ٥. أوجد الانحراف المعياري مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة لمجموعة البيانات.

مثال ٤

تدرب وحل المسائل

مثال ١

عين العينة والمجتمع في كلٍّ من الموقفين الآتيتين، ثم صف إحصائي العينة ومعلّمة المجتمع:

(٧) اختيرت عينة عشوائية طبقية من طلاب المدارس الثانوية في منطقة عسير التعليمية، وسُئل أفراد العينة عن الوقت الذي يقضيه كلٌّ منهم في الأنشطة المنهجية الإضافية خلال الأسبوع.

(٨) اختيرت عينة عشوائية طبقية مكوّنة من ٢٥٠٠ طالب من طلاب المدارس المتوسطة في المملكة. وسُئل أفراد العينة عن المبلغ الذي ينفقه كلٌّ منهم في الشهر.

مثال ٢

أوجد الانحراف المتوسط مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة لكلٍّ من مجموعتي البيانات الآتيتين:

عدد الأقراص المدمجة					
٢٦	٣٩	٥	٨٢	١٢	١٤
٠	٣	١٥	١٩	٤١	٦
٢	٠	١١	١	١٩	٢٩

(٩) **أقراص مدمجة:** طلب مدرس إلى طلاب الصف أن يحدّدوا عدد الأقراص المدمجة التي يمتلكونها فكانت النتائج كما في الجدول المجاور.

(١٠) **مبيعات:** رصد صاحب محل عدد الأكياس التي تُباع في كل ساعة من أحد أنواع الحلوى، فكانت:

٢١، ٢٥، ١٣، ١٧، ٢٤، ١٨، ١٦، ٢٢، ١٧، ١٥، ٢٤، ١٦

أوجد المتوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري إلى أقرب جزء من عشرة لكلٍّ من مجموعتي البيانات الآتيتين:

مثال ٣

(١٢) ٧٥، ٧٤، ٨٣، ٧٨، ٧٦

(١١) ١٢، ٧، ٨، ٣

(١٣) **مزاد:** يرسم نجيب لوحات لمناظر طبيعية ويعرضها للبيع في المزاد. فكان ثمن بيع بعض هذه اللوحات بالريال: ٣٢٥، ٤٥٠، ٥٠٠، ٥٧٥، ٢٢٥، ٨٥٠، ٦٠٠، ٣٥٠، ٤٥٠، ٥٠٠. أوجد الانحراف المعياري لهذه البيانات إلى أقرب جزء من عشرة.

مثال ٤

أطوال لاعبي فريق كرة السلة				
٢٠٣	١٩٦	٢١١	١٨٨	١٩٨
٢٠٣	٢١١	١٨٨	٢١١	١٧٥
١٩٨	٢١٦	٢٠٦	٢٠٦	٢٠١

(١٤) **كرة السلة:** بيّن الجدول المجاور أطوال لاعبي فريق كرة السلة في أحد الأندية الرياضية بالستيمترات.

(أ) أوجد المتوسط الحسابي والانحراف المعياري للأطوال.

(ب) إذا غيّرنا اللاعب الذي طوله ١٧٥ سم بلاعب طوله متر وسبعون سنتيمتراً، فأوجد المتوسط الحسابي والانحراف المعياري. وصف أثر هذا التبديل في النتائج السابقة.



الربط مع الحياة

يبلغ طول أطول لاعبي كرة السلة في المملكة ٢٠٨ سم.



مسائل مهارات التفكير العليا

(١٥) **اكتشف الخطأ:** تصف كل من سحر ورغد طريقة لزيادة دقة دراسة مسحية، فأيتهما كانت إجابتها صحيحة؟ فسّر إجابتك.

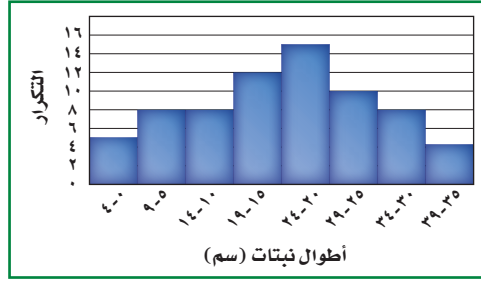
رغد

يجب اختيار عينة الدراسة المسحية عشوائيًا، ويجب أن تؤخذ عدة عينات عشوائية.

سحر

يجب أن تشتمل الدراسة المسحية على أكبر عدد ممكن من أفراد المجتمع.

(١٦) **تحّد:** أوجد المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لمجتمع البيانات الممثلة بالمدرج التكراري أدناه.



(١٧) **تبرير:** حدّد إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أحيانًا أم صحيحة دائمًا أم غير صحيحة أبدًا، وفسّر إجابتك:

"العينتان العشوائيتان المأخوذتان من المجتمع نفسه لهما المتوسط الحسابي والانحراف المعياري نفسهما".

(١٨) **مسألة مفتوحة:** صِفْ موقفًا من واقع الحياة يكون من المفيد فيه استعمال متوسط العينة لتقدير متوسط المجتمع. وِصِفْ طريقة اختيار عينة عشوائية من هذا المجتمع.

(١٩) **اكتب:** قارن بين الانحراف المعياري والانحراف المتوسط.

تدريب على اختبار

(٢١) أطوال أعلى ٧ أشجار في حديقة هي: ٢٦، ١٧، ٢٤، ١٩، ٢٤، ٢٠، ١٨ قدمًا. أوجد الوسيط لهذه الأطوال؟

- (أ) ١٧ (ب) ٢٠
(ج) ٢١ (د) ٢٤

(٢٠) **إجابة قصيرة:** زارت مجموعة من الطلاب مبنى التلفزيون، فدخل ٢٠ طالبًا منهم إلى قسم الأخبار. فإذا شكّل هؤلاء الطلاب ١٦٪ من مجموعة الطلاب، فما عدد أفراد المجموعة؟



أَيُّ مَقاييس النزعة المركزية (إن وجدت) هو الأنسب لتمثيل البيانات في كُلِّ مَمَّا يَأْتِي؟ بَرِّرْ إجابتك، ثم احسب قيمة هذا المقياس: (الدرس ١٠-٢)

(٢٢) **جميعيات النشاط:** كانت أعداد طلاب أحد الصفوف قد وُزِّعت على جميعيات النشاط على النحو الآتي:

١٤، ١٠، ٥، ٢١، ٢٥، ١٨، ١٢، ٨

(٢٣) **درجات اختبار:** كانت درجات بعض الطلاب في مادة الرياضيات على النحو الآتي:

٩٨، ٩٥، ٨٥، ٩١، ٩٠، ٨٥، ٨٨، ٨٦، ٨٥، ٨١، ٧٨

حَدِّدْ في كُلِّ مَمَّا يَأْتِي، هل العينة متحيزة أم غير متحيزة؟ وبَرِّرْ إجابتك: (الدرس ١٠-١)

(٢٤) **تسوق:** طُلب إلى كل عاشر شخص يدخل إلى مجمع تجاري أن يُسمِّي المتجر المفضل لديه.

(٢٥) **رياضة:** سُئل كل خامس شخص في مهرجان رياضي عن القناة التلفزيونية التي يفضلها.

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

إذا اخترت عشوائياً بطاقةً واحدةً من كيسٍ يحوي ٣ بطاقاتٍ حمراء و ٦ بطاقاتٍ خضراء و ٥ بطاقاتٍ صفراء، و ٨ بطاقاتٍ برتقالية اللون، فأوجد كلاً من الاحتمالات الآتية:

- | | | |
|------------------------|---------------------|----------------------------|
| (٢٦) ح (حمراء) | (٢٧) ح (برتقالية) | (٢٨) ح (صفراء أو خضراء) |
| (٢٩) ح (ليست برتقالية) | (٣٠) ح (ليست خضراء) | (٣١) ح (حمراء أو برتقالية) |



المقياس: (الدرس ١٠-٢)

(الدرس ١٠ - ٢)

(الدرس ١٠ - ٣)

Ministry of Education

جمع البيانات المُستعمل: (الدرس ١٠-١)

متحيزة، وفسّر إجابتك: (الدرس ١٠-١)

(ب) طبقية. (د) لا شيء مما ذكر.

الفصل ١٠ : اختبار منتصف الفصل ١٠٩

التباديل والتوافيق

لماذا؟

رابط الدرس الرقمي



www.ien.edu.sa



أخبر المدرب نواف أنه سيكون خامس لاعب يضرب ركلة الترجيح، إذا انتهت المباراة إلى ضربات الترجيح.

واعتمد المدرب الترتيب الأبجدي أساساً في تشكيل الفريق؛ لترتيب من يقوم بركلات الترجيح.

التباديل: تُسمى قائمة جميع الأشخاص أو الأشياء في مجموعة معينة **فضاء العينة**. وعندما تُنظم العناصر، بحيث يكون ترتيبها مهماً، وتُكتب جميع الترتيبات الممكنة لهذه العناصر، يُسمى كل من هذه الترتيبات **تبديلاً**.

إذا كان في ذهن المدرب ٤ لاعبين لضرب ركلات الترجيح الأربع الأولى، فإنه يمكن استعمال مبدأ العدّ الأساسي؛ لإيجاد عدد التباديل الممكنة لهؤلاء الأربعة. فإذا اختير لاعب معين ليكون أول من يضرب، فلن يكون اسمه مطروحاً عند اختيار اللاعب الثاني؛ لأنه لا يمكن أن يضرب اللاعب ركلة الترجيح مرتين.

عدد	عدد خيارات	عدد خيارات	عدد خيارات	عدد خيارات	عدد
التباديل	اللاعب الأول	اللاعب الثاني	اللاعب الثالث	اللاعب الرابع	عدد خيارات
ل	٤	٣	٢	١	عدد خيارات
=	×	×	×	×	عدد خيارات
٢٤ =					عدد خيارات

هناك ٢٤ طريقة ممكنة لترتيب أول أربعة لاعبين.

مثال ١ من واقع الحياة التباديل

رحلات: تخطط وكالة سياحة وسفر لرحلة سياحية، يزور المسافرون خلالها ٥ مدن في المملكة. بكم طريقة يمكن أن ترتب الوكالة المدن الخمس في خطة الرحلة؟

$$\text{عدد طرق ترتيب المدن} = ١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥ = ١٢٠$$

هناك ١٢٠ طريقة ممكنة لترتيب المدن الخمس.

تحقق من فهمك

(١) **محاضرات:** دخل ناصر وخمسة من أصدقائه قاعة محاضرات. فبكم طريقة مختلفة يمكنهم أن يجلسوا جميعاً على ٦ مقاعد خالية في صف واحد؟

يمكنك أن تكتب العبارة المستعملة في المثال ١؛ لحساب عدد التباديل للمدن الخمس

$$(١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥) \text{ في صورة } ٥! \text{ وتقرأ "مضروب العدد خمسة"}$$

أضف إلى

مطوياتك

المضروب

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: **مضروب** العدد الصحيح الموجب (ن)، هو ناتج ضرب الأعداد الصحيحة الموجبة التي تقل عن (ن) أو تساويه.

$$\text{الرموز: } ١! = ١, (١ - ن) (٢ - ن) (٣ - ن) \times \dots \times ١, ١ \leq ن, \text{ أيضاً } ٠! = ١$$

فيما سبق

درست استعمال مبدأ العد الأساسي.

والآن

- أستعمل التباديل.
- أستعمل التوافيق.

المفردات

فضاء العينة

التبديل

المضروب

التوافيق

إذا كان في ذهن المدرب ٥ لاعبين لضرب ركلات الترجيح الثلاث الأولى، فإنه يمكنك استعمال مبدأ العدّ الأساسي لإيجاد عدد التباديل.

طرق اختيار اللاعب الأول طرق اختيار اللاعب الثاني طرق اختيار اللاعب الثالث

$$5 \times 4 \times 3 = 60 \text{ تباديلًا}$$

لاحظ أن: $5 \times 4 \times 3 = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{1 \times 2}$ ؛ ويمكنك تعميم هذه العلاقة بالقانون الآتي:

قراءة الرياضيات

رموز

يمكن كتابة عدد التباديل لعناصر عددها ن، مأخوذة راءً في كل مرة بالرمز $n!$ أول (ن، ر).

أضف إلى
مطوياتك

مفهوم أساسي قانون التباديل

التعبير اللفظي: عدد التباديل لعناصر عددها (ن) مأخوذة (ر) عنصراً في كل مرة هو ناتج قسمة $n!$ على $(n-r)!$

الرموز:
$$\frac{n!}{(n-r)!} = n!_r$$

مثال ٢ من واقع الحياة استعمال قانون التباديل

مكتبة: يريد أمين المكتبة أن يعرض ٦ مجلات من بين ١٠ مجلات مختلفة على رفّ. فبكم طريقة يمكنه ذلك؟

قانون التباديل

$$n=10, r=6$$

بسّط

اقسم على العوامل المشتركة

بسّط

$$\frac{n!}{(n-r)!} = n!_r$$

$$\frac{10!}{(10-6)!} = 10!_6$$

$$\frac{10!}{4!} =$$

$$\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} =$$

$$151200 =$$

تحقق من فهمك

(٢) لوحات: رسم فنان ١٥ لوحة فنية. فبكم طريقة يمكنه اختيار ١٠ لوحات منها لعرضها في معرض فني.

إرشادات للدراسة

التباديل والتوافيق

إذا كان الترتيب مهماً في المجموعة، فإنها تمثل تباديلًا. وإذا لم يكن الترتيب مهماً في المجموعة فإنها تمثل توفيقاً.

التوافيق: يُسمّى عدد طرق التشكيل الممكنة لمجموعة عناصر ليس لترتيبها أهمية **التوافيق**. ولإيجاد التوافيق المكوّنة من حرفين من بين الحروف أ، ب، جـ يجب أن تكتب جميع الترتيب التي يتكون كل منها من حرفين وهي:

أ ب أ جـ أ جـ ب جـ ب جـ جـ أ

وبما أن الترتيب غير مهم في التوافيق، فإن أ ب و ب أ يمثلان الاختيار نفسه. أي أن هناك ٢! طريقة لكتابة الحرفين من دون ترتيب؛ لذا اقسم عدد التباديل $n!$ على $2!$ لحذف عدد التباديل التي تحتوي على العناصر نفسها.



مثال ٣ من واقع الحياة التوافيق

أعمال منزلية: تطلب أم إلى أبنائها الخمسة القيام ببعض الأعمال المنزلية كل أسبوع. بكم طريقة يمكن اختيار اثنين منهم لتنظيف ساحة المنزل؟
بما أن الترتيب في عملية الاختيار ليس مهمًا، فيجب أن نجد عدد توافيق ٥ أبناء، اختيار اثنين منهم كل مرة.

$$ن ق ر = \frac{\text{عدد التباديل}}{\text{عدد التباديل التي تحتوي على العناصر نفسها}} \text{ أوجد عدد التباديل أولاً.}$$

$$٥ ل ٢ = \frac{٥!}{٢!} = ٢٠ = ٥ = ٢ = ٢$$

وبما أننا نختار اثنين في كل مرة، فإن عدد التباديل التي تحتوي على العناصر نفسها هو $٢! = ٢$.
إذن $ن ق ر = \frac{٢٠}{٢} = ١٠$
أي أن هناك ١٠ طرق ممكنة لاختيار اثنين من الأبناء.

تحقق من فهمك

(٣) **اختبار:** تقدّم سعيد لاختبار في التاريخ، طلب فيه الإجابة عن ١٠ أسئلة من بين ١٢ سؤالاً. بكم طريقة يمكن أن يختار الأسئلة؟

يمكنك التوصل من خلال ذلك إلى قانون التوافيق.



الربط مع الحياة

إن تشجيع الأبناء على المشاركة في الأعمال المنزلية له دور كبير في تكوين الشخصية، وتعويدهم تحمّل المسؤولية، كما يقوي الروابط والصلات بين أفراد الأسرة.

أضف إلى

مطوياتك

قانون التوافيق

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: عدد التوافيق لعناصر عددها n مأخوذة (ر) عنصراً كل مرة، يساوي ناتج قسمة $n!$ على $(n-r)!$

$$\text{الرموز: } ن ق ر = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال ٤ من واقع الحياة استعمال قانون التوافيق

وظائف: أعلنت شركة عن ٥ وظائف شاغرة لديها، فتقدم للإعلان ٨ أشخاص. بكم طريقة يمكن شغل الوظائف الخمس؟

$$\text{قانون التوافيق } ن ق ر = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$ن = ٨, ر = ٥$$

بسط

اقسم على العوامل المشتركة

هناك ٥٦ طريقة لشغل الوظائف

$$\frac{٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}{٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١} =$$

$$٥٦ = \frac{٣٣٦}{٦}$$

تحقق من فهمك

(٤) **كتب:** أراد أربعة طلاب أن يختاروا كتباً يقرؤونها من بين ١٨ كتاباً مختلفاً، تتكون من ٤ روايات، و ٦ كتب علمية، و ٨ كتب إسلامية. بكم طريقة يمكنهم اختيار الكتب الأربعة؟

يمكن استعمال التباديل والتوافيق لإيجاد احتمال حادثة ما.

ارشادات للدراسة

ثلاثة أرقام:

يمكن اعتبار العدد ٢٥ رمزاً لفتح القفل، بينما لا يُعدّ العدد ٢٥ رمزاً لفتحه.

مثال ٥ من واقع الحياة إيجاد الاحتمال باستعمال التباديل

أفضل: يتطلب فتح قفل يعمل بالأرقام رمزاً مكوناً من ثلاثة أرقام من بين الأرقام صفر إلى ٩ على ألا يُستعمل العدد الواحد أكثر من مرة واحدة.

(أ) ما عدد الترتيبات المختلفة الممكنة؟

بما أن ترتيب الأرقام في الرمز مهم، إذن هذه الحالة تمثل تبادل عشرة أرقام مأخوذة ثلاثة في كل مرة.

قانون التباديل

$$n = 10, r = 3$$

بسط

اقسم على العوامل المشتركة

بسط

$$\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$\frac{10!}{3!(10-3)!}$$

$$\frac{10!}{1!7!}$$

$$\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} =$$

$$720 =$$

هناك ٧٢٠ رمزاً مختلفاً.

(ب) ما احتمال أن تكون جميع أرقام الرمز فردية؟

نستعمل مبدأ العدّ الأساسي؛ لإيجاد عدد الحالات التي تكون فيها الأرقام الثلاثة فردية. هناك ٥ أرقام فردية هي: ١، ٣، ٥، ٧، ٩، إذن عدد عناصر الحادثة يساوي $5 \times 4 \times 3 = 60$.

$$\frac{\text{عدد عناصر الحادثة}}{\text{عدد عناصر الفضاء العيني}} = \frac{60}{720} \rightarrow \frac{1}{12}$$

بالتبسيط

احتمال أن تكون جميع أرقام الرمز فردية هو $\frac{1}{12} = 8\%$ تقريباً

تحقق من فهمك

(٥) **شركات:** يريد أعضاء مجلس إدارة شركة أن يختاروا رئيساً ونائباً للرئيس وأميناً للسر وأميناً للصندوق. وكان فهد وسطام من بين تسعة مرشحين لهذه المراكز.

(أ) بكم طريقة يمكن لأعضاء مجلس الإدارة اختيار الأعضاء الذين يشغلون هذه المراكز؟

(ب) إذا تم الاختيار عشوائياً، فما احتمال أن يُختار فهد أو سطام لمركز الرئيس أو نائب الرئيس؟

تأكد

مثال ١

(١) **جوائز:** يريد أحد المراكز التجارية أن يعرض صور جوائزه الست التي يوزّعها على الزبائن على لوحة. بكم طريقة يمكن تنظيم الجوائز في صف واحد؟ أوجد قيمة كل ممّا يأتي:

$$(٢) ٧ \text{ ل } ٢ \quad (٣) ٩ \text{ ل } ٣ \quad (٤) ٦ \text{ ق } ٤ \quad (٥) ٥ \text{ ق } ٢$$

الأمثلة ٢ - ٤

(٦) **إعادة تدوير:** وضع خالد حاويات لتجميع المواد التي سيُعاد تدويرها، على أن تكون هناك حاوية لكل من المواد الآتية: الزجاج والبلاستيك والورق والألومنيوم. بكم طريقة يمكن أن ينظم خالد هذه الحاويات في صف؟

مثال ٥

(٧) **مثلجات:** يعرض أحد مصانع المثلجات ٥ أنواع مختلفة بطعم الشوكولاتة، و ٤ أنواع مختلفة بطعم الفراولة و ٦ أنواع بطعم التوت.

(أ) بكم طريقة يمكن أن يختار أحد الزبائن ٣ أنواع مختلفة من المثلجات؟

(ب) هل تتضمن عملية الاختيار التبادل أم التوافق؟

(ج) إذا تم اختيار أنواع «المثلجات» عشوائياً، فما احتمال أن تكون الأنواع الثلاثة التي اختارها أحد الزبائن بطعم الشوكولاتة؟

تدرب وحل المسائل

مثال ١

(٨) **تصوير:** اصطف الطلاب الأربعة الأوائل في فصول الصف الثالث المتوسط في إحدى المدارس في صفٍ لالتقاط صورة؛ لعرضها على لوحة الشرف في المدرسة. فبكم طريقة يمكن أن ينظم المصور الطلاب الأربعة ليلتقط الصورة؟

(٩) **مسابقات علمية:** وصل ٨ طلاب إلى المرحلة النهائية في مسابقات علمية. فبكم طريقة يمكن أن يقف هؤلاء الطلاب في صفٍ على منصة قاعة الاحتفالات؟

أوجد قيمة كل مما يأتي:

الأمثلة ٢ - ٤

(١٠) 6P_6	(١١) 1P_1	(١٢) 4P_1	(١٣) 7P_3
(١٤) 7P_6	(١٥) 5P_3	(١٦) 5P_0	(١٧) 3P_0

(١٨) **مجوهرات:** يعمل قاسم في محل لبيع المجوهرات. وقد طلب منه مديره أن يضع ثلاثاً من القلائد الاثنتي عشرة في خزانة العرض الأمامية. فبكم طريقة يمكن أن يرتب قاسم القلائد في خزانة العرض؟

مثال ٥

(١٩) **كرات زجاجية:** يوجد في كيس ٢٠ كرة زجاجية، منها ٧ كرات حمراء و ٨ زرقاء و ٥ خضراء. فإذا سُحبت ١٥ كرة من الكيس عشوائياً، فما احتمال سحب ٥ كرات من كل لون؟

(٢٠) **كرة قدم:** رشح معلم التربية الرياضية ٩ طلاب من الصف الأول المتوسط، و ٦ طلاب من الصف الثاني المتوسط، و ٨ طلاب من الصف الثالث المتوسط؛ لتشكيل فريق كرة القدم المدرسي. إذا علمت أن الفريق يتكون من ١١ لاعباً أساسياً.

(أ) ما عدد طرق اختيار الفريق الأساسي؟

(ب) إذا تم اختيار الفريق الأساسي عشوائياً، فما احتمال أن يكون من بينهم طالب واحد على الأقل من الصف الثالث المتوسط؟

حدّد هل يتضمن كل موقف من المواقف الآتية تبادل أم توافق:

(٢١) اختيار ٣ أنواع مختلفة من الفطائر من قائمة تحتوي على ١٢ نوعاً.

(٢٢) اختيار الفائزين بالمراكز الثلاثة الأولى في مسابقة ثقافية.

(٢٣) اختيار ٥ كتب لقراءتها من بين ٨ كتب على رفٍّ.

(٢٤) ترتيب حروف كلمة «سعودي».



(٢٥) **وظائف:** أجرى ٥١ شخصًا مقابلة لشغل إحدى الوظائف، فقامت لجنة المقابلة باختيار مرشح لهذه الوظيفة و٤ بدلاء.

(أ) هل تتضمن عملية الاختيار تبادل أم توافق؟

(ب) بكم طريقة يمكن أن تختار اللجنة المرشح للوظيفة والبدلاء الأربعة؟

(٢٦) **خزانة:** نسي هاني ترتيب الأعداد التي يستعملها لفتح خزانته. ولكنه يتذكر أنها تتكون من الأعداد ٥، ١٦، ٣١. فما العدد الأكبر للمحاولات التي ينفذها لفتح الخزانة؟

مسائل مهارات التفكير العليا

(٢٧) **اكتشف الخطأ:** تريد كل من سلمى ونوف أن يكونا لجنة مؤلفة من ٤ طالبات؛ للإشراف على تزيين المدرسة استعدادًا لاحتفال تكريم الأوائل. تريد كل منهما أن تحدد عدد اللجان التي يمكن تشكيلها إذا تطوّعت ١٠ طالبات للقيام بهذا العمل. فأيتهما كانت إجابتها صحيحة؟ فسر إجابتك.

$$\begin{aligned} \text{نوف} \\ \frac{!10}{!4!(4-10)} = {}^{10}C_4 \\ 210 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{سلمى} \\ \frac{!10}{!(4-10)} = {}^{10}C_4 \\ 5040 = \end{aligned}$$

(٢٨) حدّد الموقف المختلف عن المواقف الثلاثة الأخرى فيما يأتي، ووضح إجابتك:

اختيار ١٠ كرات ملونة من حقيبة.

اختيار ٥ متسابقين في مسابقة ثقافية.

تحديد ترتيب الطلاب الفائزين في إحدى المسابقات.

اختيار ٤ خيول من بين ٦ خيول للمشاركة في سباق.

(٢٩) **تبيرير:** حدّد هل تكون العبارة ${}^nC_r = {}^nC_r$ صحيحة أحيانًا أم صحيحة دائمًا أم غير صحيحة أبدًا. فسر إجابتك.

(٣٠) **اكتب:** اذكر موقفًا لاختيار ٣ أشياء من بين ٨ أشياء، على ألا يكون الترتيب فيه مهمًا.

تدريب على اختبار

(٣٢) مع سالم ٦٠ ورقة نقدية من فئتي عشرة ريالات وخمسة ريالات، قيمتها ٤٨٠ ريالاً. فكم ورقة معه من فئة عشرة ريالات؟

(ج) ٣٦

(أ) ٢٤

(د) ٤٠

(ب) ٣٠

(٣١) يريد سعيد أن يزرع ٣ أنواع مختلفة من بين ٨ أنواع مختلفة من الأزهار على جانب ممر في حديقته. بكم طريقة يمكنه زراعة هذه الأزهار؟

(ج) ٣٣٦

(أ) ٣٤٢

(د) ٣٢٨

(ب) ٣٣٨



مراجعة تراكمية

أوجد المتوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري لكل مجموعة من مجموعات البيانات الآتية مقررًا الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة.
الدرس (١٠-٣)

(٣٤) ٥٠، ١٢، ٢٠، ٤٠، ١٠، ٣٠، ٢٠

(٣٣) ٨٩، ٧٢، ٤٧، ٥٩، ٤٧، ٧٦

(٣٥) مسح: أجرت إحدى شركات صنع العصائر دراسة مسحية؛ لمعرفة عدد العلب التي يشتريها الزبون في الأسبوع. فحصلت على الاستجابات الآتية: ١٤، ٧، ٣، ٠، ١٠، ١٢، ١٠، فأبي مقاييس النزعة المركزية أفضل لتمثيل هذه البيانات؟ برّر إجابتك، ثم أوجد هذا المقياس. الدرس (١٠-٢)

استعد للدرس اللاحق

مهارة سابقة:

إذا اخترت عشوائيًا قطعة بلاستيك واحدة من كيس يحوي ١٠ قطع حمراء و ١٢ قطعة زرقاء و ٨ قطع خضراء و ٤ قطع صفراء و ١٢ قطعة سوداء، فأوجد كلاً من الاحتمالات الآتية:

(٣٨) ح (سوداء أو صفراء)

(٣٧) ح (حمراء)

(٣٦) ح (زرقاء)

(٤١) ح (ليست خضراء)

(٤٠) ح (ليست زرقاء)

(٣٩) ح (خضراء أو حمراء)





www.iien.edu.sa

احتمالات الحوادث المركبة

لماذا؟

يرغب خالد في السفر من الرياض إلى جدة بالطائرة.
وتشير تقارير شركة الطيران إلى وصول الطائرات في موعدها
بنسبة ٩٢٪ من الرحلات. كما تشير إلى فقدان الأمتعة في ١٪
من الحالات. ما احتمال وصول طائرة خالد في موعدها وعدم
فقدان أمتعته؟

[illegible]

فيما سبق

درست حساب احتمال
بسیط.

والآن

- أجد احتمال حادثتين مستقلتين أو حادثتين غير مستقلتين.
- أجد احتمال حادثتين متنافيتين أو حادثتين غير متنافيتين.

المفردات

الحادثة المركبة

الحادثتان المستقلتان

الحادثتان غير المستقلتين

الحادثان المتنافستان

مفهوم اساسی

احتمال الحوادث المستقلة

النموذج:

التعبير اللفظي:

إذا كانت الحادثان أَوْ ب

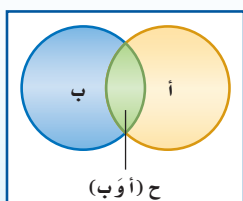
مستقلتين، فإن احتمال

وقوعهما معًا، یساوی حاصل،

ضرب احتمال الحادثة أفي

احتمال الحادثة ب.

الرموز:

$$ح(أَ و ب) = ح(أ) \times ح(ب)$$


احتمال الحوادث المستقلة

مثال ١ من واقع الحياة



كرات زجاجية: يحتوي كيس على ٦ كرات سوداء و ٩ زرقاء و ٤ صفراء وكرتين خضراوين. فإذا سُحبت منه كرة عشوائياً ثم أعيدت وُسِّحبت كرة ثانية، فأوجد احتمال سحب كرة سوداء ثم كرة صفراء.

$$\frac{\text{عدد الكرات السوداء}}{\text{عدد الكرات الكلية}} = \frac{6}{21} \quad \text{الكرة الأولى: ح (سوداء)}$$

الكرة الثانية: ح(صفراء) = $\frac{4}{21}$ ← ← $\frac{\text{عدد الكرات الصفراء}}{\text{عدد الكرات الكلي}}$

ح (سوداء و صفراء) = ح (سوداء) × ح (صفراء) **احتمال الحوادث المستقلة**

عوض $\frac{24}{441} = \frac{4}{21} \times \frac{6}{21} =$

الاحتمال يساوي $\frac{24}{441} = 5.4\% \approx$.

تحقق من فهمك

(أ) ح (زرقاء وخضراء) (ب) ح (ليست سوداء وزرقاء)

عندما تؤثر نتيجة حادثه ما في نتيجة حادثه أخرى نقول عنهما: إنهما **حادثان غير مستقلتين**، ففي المثال ١ إذا لم تُرجع الكرة التي سُحبت في المرة الأولى إلى الكيس، فإن سحب الكرتين يمثل حادثتين غير مستقلتين؛ لأن احتمال سحب الكرة الثانية يعتمد على لون الكرة التي سُحبت أولاً.

التعبير اللفظي: إذا كانت الحادثتان أ و ب غير مستقلتين، فإن احتمال وقوعهما معًا يساوي حاصل ضرب احتمال وقوع الحادثة (أ) في احتمال وقوع الحادثة (ب) بعد وقوع الحادثة أ.

الرموز: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B | A)$

تذكر أن متممة مجموعة هي جميع العناصر التي لا تنتمي إلى تلك المجموعة. افترض أنه يوجد في وعاء ٦ أقلام زرقاء و ٨ أقلام حمراء و ٧ أقلام خضراء و ٩ أقلام سوداء، فإن متممة سحب قلم أزرق هي سحب قلم أحمر أو أخضر أو أسود؛ لذا فإن احتمال سحب قلم أزرق يساوي $\frac{6}{30}$ ، واحتمال عدم سحب قلم أزرق يساوي $\frac{24}{30}$ ، وبالتالي يكون مجموع احتمالي أي حادثتين متتامتين يساوي ١.

مثال ٢ من واقع الحياة الاحداث غير المستقلة

بطاقات: يوجد في صندوق ١٠ بطاقات حمراء و ١٠ صفراء و ١٠ زرقاء و ١٠ بيضاء. وبطاقات كل مجموعة مرقمة بالأرقام من ١ إلى ١٠. فإذا سحب عبد الكريم ثلاث بطاقات عشوائيًا من الصندوق واحدة تلو الأخرى من دون إرجاع. فأوجد احتمال أن تكون البطاقات المسحوبة بالترتيب المُعطى في كلٍّ مما يأتي:

(أ) ح (حمراء، بيضاء، حمراء)

←	عدد البطاقات الحمراء	←	$\frac{1}{4} = \frac{10}{40} =$ ح (حمراء)
←	عدد البطاقات الكلي	←	
←	عدد البطاقات البيضاء	←	$\frac{10}{39} =$ ح (بيضاء)
←	عدد البطاقات المتبقية	←	
←	عدد البطاقات الحمراء المتبقية	←	$\frac{9}{38} =$ ح (حمراء)
←	عدد البطاقات المتبقية	←	

ح (حمراء، بيضاء، حمراء) = ح (حمراء) × ح (بيضاء) × ح (حمراء)

$\frac{10}{40} \times \frac{10}{39} \times \frac{9}{38} = \frac{90}{988} \approx 9.1\%$ إذن الاحتمال يساوي $\frac{90}{988}$ تقريبًا.

(ب) ح (أربعة، أربعة، ليس تسعة)

بعد أن يسحب عبد الكريم البطاقتين اللتين تحملان الرقم ٤، إذن يبقى في الصندوق ٣٨ بطاقة. وبما أن البطاقتين المسحوبتين لا تحملان الرقم ٩، فإنه يوجد في الصندوق ٤ بطاقات تحمل الرقم ٩؛ وعليه فإن عدد البطاقات التي لا تحمل الرقم ٩ يساوي $38 - 4 = 34$.

ح (أربعة، أربعة، ليس تسعة) = ح (أربعة) × ح (أربعة) × ح (ليس تسعة)

$\frac{4}{40} \times \frac{3}{39} \times \frac{34}{38} = \frac{17}{1960}$

إذن الاحتمال يساوي $\frac{17}{1960} \approx 0.8\%$ تقريبًا.

تحقق من فهمك

(أ) ح (اثنان، خمسة، ليس خمسة) (ب) ح (حمراء، ليست حمراء، حمراء)

الحوادث المتنافية: تُسمى الحادثتان اللتان لا يمكن وقوعهما معًا **حادثتين متنافيتين**. افترض أنك تريد أن تجد احتمال سحب بطاقة حمراء أو بطاقة زرقاء من وعاء يحتوي على بطاقات ملونة. بما أنه لا يمكن أن تكون البطاقة حمراء وزرقاء في الوقت نفسه فتُسمى هاتان الحادثتان حادثتين متنافيتين.

إرشادات حل المسألة

التمثيل

يساعد تمثيل الموقف أو المسألة في فهم السؤال المطروح، لذا استعمل أوراقًا ملونة لتمثيل المسألة.

إرشادات للدراسة

«أو»، «أو»

ترتبط الاحتمالات التي تتضمن «أو» بالحوادث المستقلة وغير المستقلة، في حين ترتبط الاحتمالات التي تتضمن «أو» بالحوادث المتنافية وغير المتنافية.

إرشادات للدراسة

طريقة بديلة

يمكن أن تجد الاحتمال في المثال ٣، أ، بقسمة عدد عناصر الحادثة على عدد النواتج الممكنة جميعها.

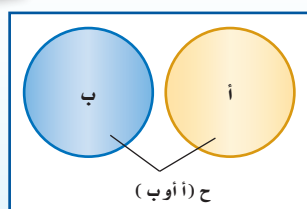
$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{1+1}{1+1+1}$$

مفهوم أساسي

الحوادث المتنافية

التعبير اللفظي: إذا كانت الحادثتان أ و ب متنافيتين، فإن احتمال وقوع أ أو وقوع ب يساوي مجموع احتمالي الحادثتين.

الرموز: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$



مثال ٣ من واقع الحياة

الحوادث المتنافية

أوجد كلاً من الاحتمالات الآتية عند رمي مكعب أرقام:

أ) ح (٣ أو ٥)

بما أنه لا يمكن أن يظهر الرقم ٣ والرقم ٥ في الوقت نفسه على وجه المكعب العلوي، فإن هاتين الحادثتين متنافيتان.

عدد الأوجه التي تحمل ٣	→	$\frac{1}{6}$	ح (ظهور ٣) =
عدد أوجه المكعب جميعها	→		
عدد الأوجه التي تحمل ٥	→	$\frac{1}{6}$	ح (ظهور ٥) =
عدد أوجه المكعب جميعها	→		

ح (٣ أو ٥) = ح (ظهور ٣) + ح (ظهور ٥) = احتمال الحوادث المتنافية

عوض $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} =$

اجمع $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} =$

إذن احتمال ظهور الرقم ٣ أو ٥ عند رمي مكعب أرقام يساوي $\frac{1}{3} = 33\%$ تقريباً.

ب) ح (٤ على الأقل)

ظهور ٤ على الأقل يعني ظهور ٤ أو ٥ أو ٦؛ لذا يجب أن تجد احتمال ظهور ٤ أو ٥ أو ٦.

ح (٤ على الأقل) = ح (ظهور ٤) + ح (ظهور ٥) + ح (ظهور ٦) = حوادث متنافية

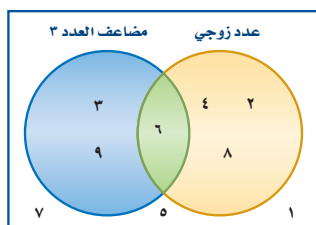
عوض $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} =$

اجمع ثم بسط $\frac{1}{2} = \frac{3}{6} =$

إذن احتمال ظهور ٤ على الأقل يساوي $\frac{1}{2} = 50\%$.

تحقق من فهمك

١٣) ح (أقل من ٣) ٣) ح (عدد زوجي)



افترض أنك تريد أن تجد احتمال سحب بطاقة تحمل عدداً زوجياً أو مضاعفاً للعدد ٣ عشوائياً من مجموعة مكونة من ٩ بطاقات مرقمة بالأرقام من ١ إلى ٩. وبما أن العدد الظاهر على البطاقة يمكن أن يكون زوجياً ومضاعفاً للعدد ٣ في الوقت ذاته، فإن هاتين الحادثتين غير متنافيتين.

ح (عدد زوجي) ح (مضاعف للعدد ٣) ح (زوجي ومضاعف للعدد ٣)

$\frac{4}{9}$ $\frac{3}{9}$ $\frac{1}{9}$

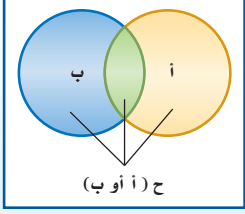
في الكسرين الأول والثاني السابقين حُسب احتمال سحب العدد ٦ مرتين؛ إحداهما في حادثة ظهور عدد زوجي، والثانية في حادثة ظهور مضاعف للعدد ٣؛ لذا يتطلب إيجاد الاحتمال المطلوب أن نطرح ح (عدد زوجي ومضاعف للعدد ٣) من مجموع الاحتمالين الأولين.
إذن ح (عدد زوجي أو مضاعف للعدد ٣) = ح (عدد زوجي) + ح (مضاعف للعدد ٣) - ح (عدد زوجي ومضاعف للعدد ٣) = $\frac{4}{9} + \frac{3}{9} - \frac{1}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

مفهوم أساسي **الحوادث غير المتنافية**

التعبير اللفظي: إذا كانت الحادثتان أ و ب غير متنافيتين، فإن احتمال وقوع أ أو وقوع ب يساوي مجموع احتماليهما ناقص احتمال وقوع الحادثتين معاً.

الرموز: $ح (أ \text{ أو } ب) = ح (أ) + ح (ب) - ح (أ \text{ و } ب)$

مطويتك أضف إلى



قراءة الرياضيات

أ أو ب
يختلف استعمال أ أو ب عن الاستعمال اللغوي، فالعبارة أ أو ب تسمح بإمكانية وقوع الحادثتين أ و ب معاً أيضاً.

مثال ٤ من واقع الحياة **الحوادث غير المتنافية**

الطلاب الرياضيون: يوجد من بين ٢٤٠ طالباً في مدرسة ما ١٧٦ طالباً متفوقاً علمياً و ٤٨ طالباً متفوقاً رياضياً. وهناك ٣٦ طالباً متفوقاً علمياً ورياضياً. اختير طالب عشوائياً فما احتمال أن يكون متفوقاً علمياً أو رياضياً؟

بما أن بعض الطلاب متفوقون علمياً ورياضياً فالحادثتان غير متنافيتين.

ح (متفوق رياضياً) = $\frac{48}{240}$ ، ح (متفوق علمياً) = $\frac{176}{240}$ ، ح (متفوق رياضياً وعلمياً) = $\frac{36}{240}$

ح (متفوق رياضياً أو علمياً) = ح (متفوق رياضياً) + ح (متفوق علمياً) - ح (متفوق رياضياً وعلمياً)

عوض $\frac{48}{240} + \frac{176}{240} - \frac{36}{240} =$

بسط. $\frac{47}{60} = \frac{188}{240} =$

الاحتمال يساوي $\frac{47}{60} = 78\%$ تقريباً.

تحقق من فهمك

تنبيه

تقاطع الحوادث
عند إيجاد احتمالات الحوادث غير المتنافية، نحسب تقاطع الحادثتين؛ لأنه يوجد في كلتا الحادثتين. لذا يجب الانتباه إلى أنه في الحقيقة يقع في تقاطعهما مرة واحدة.

(٤) مكعب أرقام: عند رمي مكعب أرقام، ما احتمال ظهور عدد فردي أو أولي؟

تأكد

المثالان ٢، ١

بين إن كانت الحوادث في الأسئلة الآتية مستقلة أم غير مستقلة، ثم أوجد احتمال كل منها :

(١) **ألعاب الأطفال:** يحتوي صندوق ألعاب على ١٢ دمية و ٨ سيارات صغيرة و ٣ كرات. إذا اختارت أمينة اثنتين عشوائياً من هذه الألعاب لأخيها الأصغر، فما احتمال أن تكون قد اختارت سيارتين صغيرتين؟

(٢) **فواكه:** تحتوي سلة على ٦ تفاحات و ٥ موزات و ٤ برتقالات و ٥ كمثرى. إذا اختار ماجد حبة واحدة من الفاكهة عشوائياً وأكلها ثم اختار حبة ثانية. فما احتمال أن يكون قد اختار موزة ثم تفاحة؟



(٣) **كتب:** اختار حسن كتابًا من الرف المجاور عشوائيًا، وأعاده ثم اختار كتابًا آخر. فما احتمال أن يكون قد اختار كتابين من كتب الرياضيات؟

المثالان ٣، ٤

يحتوي صندوق على ٨ كرات حمراء و ٨ سوداء و ٨ بيضاء و ٨ زرقاء، وقد رُقمت كرات كل لون بالأرقام من ١ إلى ٨، فإذا سُحبت كرة واحدة عشوائيًا من الصندوق. حدّد هل الحادثان في كلٍّ مما يأتي متنافيتان أم غير متنافيتين، ثم أوجد الاحتمال:

- (٤) ح (٢ أو ٨) (٥) ح (حمراء أو زرقاء) (٦) ح (زوجي أو سوداء)

تدرب وحل المسائل

المثالان ١، ٢

حدّد إذا كانت الحوادث فيما يأتي مستقلة أم غير مستقلة، ثم احسب احتمال كلٍّ منها:

(٧) **نقود:** إذا أُلقيت قطعة نقود ٤ مرات، فما احتمال ظهور الكتابة في المرات الأربع جميعها؟

(٨) **مكعب أرقام:** رمي مكعب أرقام مرتين، فما احتمال ظهور عددين مختلفين؟

(٩) **حلوى:** يحتوي صندوق على ١٠ قطع شوكولاتة بالحليب و ٨ قطع شوكولاتة سوداء و ٦ قطع شوكولاتة بيضاء. اختار محمد قطعة واحدة عشوائيًا وأكلها، ثم اختار قطعة ثانية عشوائيًا. فما احتمال أن يكون قد اختار قطعة شوكولاتة بالحليب، ثم قطعة شوكولاتة بيضاء؟

(١٠) **مكعب أرقام:** إذا أُلقي مكعب أرقام مرتين، فما احتمال ظهور العدد نفسه في الرمتين؟

حدّد إذا كانت الحوادث الآتية متنافية أم غير متنافية، ثم أوجد احتمال كلٍّ منها:

المثالان ٣، ٤

(١١) **لعبة البولينج:** تشير نتائج سابقة إلى أن احتمال أن يسقط مشعل جميع القوارير في المحاولة الأولى ٣٠٪، واحتمال إسقاطها في المحاولة الثانية ٤٥٪، واحتمال عدم إسقاطها في محاولتين ٢٥٪. فما احتمال أن يسقط مشعل القوارير جميعها في المحاولة الأولى أو الثانية لأيّ إطار؟

(١٢) **صغار القططة:** أنجبت هرة ٨ قططة صغيرة: خمس إناث؛ اثنتان برتقاليتان، و ٣ ملونة، وثلاثة ذكور؛ واحد برتقالي، واثنتان ملونتان. فأراد خالد أن يحتفظ بواحدة من القططة الصغيرة، فما احتمال أن يختار منها واحدًا برتقالي اللون أو أنثى عشوائيًا؟

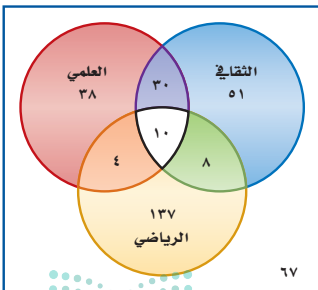
يحتوي كيس على ١٠ بطاقات حمراء و ١٠ زرقاء و ١٠ بيضاء و ١٠ خضراء، ورُقمت البطاقات من كل لون بالأعداد من ١ إلى ١٠، فإذا سُحبت بطاقتان من دون إرجاع، فأوجد كلاً من الاحتمالات الآتية:

- (١٣) ح (حمراء أو زرقاء) (١٤) ح (زرقاء أو بيضاء) (١٥) ح (١٠ ثم حمراء)
(١٦) ح (٨ ثم زرقاء) (١٧) ح (خمسة ثم خضراء) (١٨) ح (٣ أو ليست بيضاء)

(١٩) **النشاط المدرسي:** يمثّل شكل فن الآتي النشاطات المدرسية التي يشارك فيها طلاب المرحلة المتوسطة في إحدى المدارس.

(أ) ما عدد طلاب المرحلة المتوسطة في هذه المدرسة؟

(ب) ما عدد الطلاب المشاركين في النشاط الرياضي؟



الربط مع الحياة

لعبة البولينج رياضة فردية أو جماعية، تُقدّف فيها كرة من البلاستيك الثقيل (١٦ رطلاً) لتضرب قوارير خشبية أو بلاستيكية طول الواحدة منها حوالي ٣٨ سم، موضوعة في نهاية مضمار طوله ١٨ مترًا، وعرضه ١,٠٤ مترًا؛ بهدف إسقاط أكبر عدد منها وتسجيل نقاط.

(ج) إذا اختير أحد طلاب الصف عشوائياً، فما احتمال أن يكون مشاركاً في النشاط الرياضي أو العلمي؟

(د) إذا اختير أحد طلاب الصف عشوائياً، فما احتمال أن يكون مشاركاً في النشاطين الثقافي والعلمي فقط؟

(٢٠) **حلول:** يحتوي وعاء على ١٠ قطع حلوى حمراء، و٦ خضراء، و٧ صفراء و ٥ برتقالية. فما احتمال أن يتم اختيار ٣ قطع عشوائياً مع الإرجاع، على أن تكون الأولى حمراء والثانية حمراء والثالثة برتقالية؟

مسائل مهارات التفكير العليا

(٢١) **اكتشف الخطأ:** يريد كل من حميد وجمال تحديد احتمال اختيار كرة زرقاء أو حمراء عشوائياً من كيس يحتوي على ٨ كرات زرقاء و ٦ حمراء و ٨ صفراء و ٤ بيضاء. فأيهما كانت إجابته صحيحة؟ اشرح تبريرك.

جمال

$$\begin{aligned} & \text{ح (زرقاء أو حمراء)} \\ & \text{ح (زرقاء)} \times \text{ح (حمراء)} \\ & \frac{6}{66} \times \frac{8}{66} = \\ & \frac{48}{4356} = 1.1\% \text{ تقريباً} \end{aligned}$$

حميد

$$\begin{aligned} & \text{ح (زرقاء أو حمراء)} \\ & \text{ح (زرقاء)} + \text{ح (حمراء)} \\ & \frac{6}{66} + \frac{8}{66} = \\ & \frac{14}{66} = 21.2\% \text{ تقريباً} \end{aligned}$$

(٢٢) **تبرير:** افترض أن هناك ٣ حوادث غير متنافية هي أ، ب، ج، واكتب جميع الاحتمالات التي يجب أخذها في الاعتبار عند حساب ح (أ أو ب أو ج)، ثم اكتب الصيغة التي تستعمل لحساب هذا الاحتمال.

(٢٣) **مسألة مفتوحة:** صف موقفاً في حياتك يتضمن حوادث مستقلة وأخرى غير مستقلة، وشرح الأسباب التي تجعل الحادثة مستقلة أو غير مستقلة.

(٢٤) **اكتب:** اشرح لماذا يُستعمل الطرح عند حساب احتمال حادثتين غير متنافيتين.

تدريب على اختبار

(٢٦) **إجابة قصيرة:** إذا كان احتمال ظهور الشعار عند إلقاء قطعة نقود يساوي احتمال ظهور الكتابة، فما احتمال ظهور الكتابة إذا أُلقيت قطعة النقد مرة أخرى؟

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{1}{3}$
(ج) $\frac{1}{4}$ (د) $\frac{3}{4}$

(٢٥) بكم طريقة يمكن اختيار لجنة مكونة من ٤ أشخاص من بين ١٢ شخصاً؟

(أ) ٤٨ (ب) ٤٨٣
(ج) ٤٩٥ (د) ١١٨٨٠

مراجعة تراكمية

(٢٧) **هندسة:** مستطيل عرضه $3\sqrt{5}$ سنتيمتر، وطوله $4\sqrt{10}$ سنتيمتر. أوجد مساحته. ثم اكتب الإجابة على شكل جذر في أبسط صورة. (الدرس ٩-٢)

حل كلاً من المعادلات الآتية، ثم تحقق من صحة الحل: (الدرس ٩-٤)

(٣٠) $10 = 2 - \sqrt{4x^3}$

(٢٩) $\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

(٢٨) $6 = \sqrt{3 - a}$



الفصل ١٠ اختبار الفصل

(١٣) **مكعب أرقام:** عند رمي مكعب أرقام مرتين، ما احتمال ظهور العدد ٢ في المرة الأولى، والعدد ٣ في المرة الثانية؟

(١٤) **تعليم:** سأل خالد ٢٠٠ طالب في مدرسته عن عدد الأيام التي يحل فيها الطلاب واجباتهم المنزلية في الأسبوع. وعرضت النتائج في الجدول الآتي:

عدد الطلاب	عدد الأيام
٦	١
١٨	٢
٣١	٣
٤٦	٤
٥٧	٥
٤٢	٦ أو أكثر

(أ) إذا اختير أحد طلاب المدرسة عشوائياً، فما احتمال أن يكون قد حل واجبات منزلية في أكثر من خمسة أيام؟

(ب) إذا اختير أحد طلاب المدرسة عشوائياً، فما احتمال أن يكون قد حل واجبات منزلية في ثلاثة أيام على الأكثر؟

أوجد المتوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري إلى أقرب جزء من عشرة لكل من مجموعات البيانات الآتية:

(١٥) ١٠، ٨، ٩، ٦، ٦، ٥، ٥، ٤، ٣، ٢، ١ (١٦) ٣٠، ٢٧، ٢٥، ٢٢، ٢٠، ١٨، ١٥، ١٢، ١٠، ٨، ٦، ٤، ٣، ٢، ١

(١٧) **صحف:** تابع ناصر زمن مطالعة الصحيفة بالدقائق لسبعة من زملائه في أحد الأيام فكانت: ٥، ٥، ١٠، ١٥، ٢٠، ٢٥، ٦٠. أوجد الانحراف المتوسط لهذه البيانات مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة.

(١٨) **اختيار من متعدد:** لتمثيل مدرسة متوسطة في تجمع طلابي اختير طالبان عشوائياً من كل صف من الصفوف: الأول والثاني والثالث المتوسط. فما أفضل وصف لهذه العينة؟

- (أ) بسيطة. (ب) طبقية. (ج) منتظمة. (د) لا شيء مما ذكر.

عين العينة والمجتمع الذي اختيرت منه فيما يأتي، ثم صنف الطريقة المستعملة لجمع البيانات:

(١) **لعبة:** دعت شركة تنتج لعباً للأطفال ٥٠ طفلاً لاختيار لعبة جديدة ورصدت ردود أفعالهم.

(٢) **أزهار:** أرسل مشتل استبانة؛ لتحديد نوع الأزهار التي يفضلها الناس بصورة أكثر. وقد أرسل هذه الاستبانة إلى من تخطى سن الـ ٥٠ سنة في القوائم البريدية الخاصة بزبائن المشتل.

احسب قيمة كل من المقادير الآتية:

(٣) ٧^٥ (٤) ١٠^٤ (٥) ٧^٢ (٦) ٣^٦

ما مقياس النزعة المركزية الأنسب لتمثيل البيانات الآتية؟ برّر إجابتك، واحسب قيمة المقياس:

(٧) **انتخابات:** رصد مركز انتخابات، أعمار الأشخاص الذين انتخبوا في ذلك المركز فكانت: ٢١، ٢٥، ٣٢، ٤١، ٣٢، ٢٠، ٦٥، ٣٣، ٣٠، ٧٢

(٨) **تسوق:** رصد محل تجاري عدد القطع التي يشتريها المتسوقون في يوم معين فكانت: ٣، ٤، ٥، ٣، ٤، ٥، ٤، ٥، ٣، ١٠، ٢، ٣، ٢.

بين إن كانت العينة في كل مما يأتي متحيزة أم غير متحيزة، وبرّر إجابتك:

(٩) **صحف:** أرسلت استبانة لجميع المشتركين في إحدى الصحف؛ لمعرفة الصحيفة التي يفضل الناس قراءتها.

(١٠) **تسوق:** سُئل كل شخص يغادر مجمعاً تجارياً عن أفضل ٣ محال لبيع الملابس في المجمع.

(١١) **كتب:** بكم طريقة يمكن اختيار ثلاثة من بين عشرة كتب مختلفة؟

(١٢) ما الاحتمال النظري لظهور الشعار عند إلقاء قطعة نقد؟



اختيار من متعدد

اقرأ كل سؤال فيما يأتي، ثم اختر رمز الإجابة الصحيحة.

(١) بيّن الجدول الآتي عدد السّعات الحرارية في ١٢ صنفاً من الأطعمة الخفيفة المختلفة. فما مقياس النزعة المركزية الأكثر تأثراً بالقيمة المتطرفة ٣٤٢ سّعة؟

عدد السّعات الحرارية في الأطعمة			
١٢١	١٤٩	٨٧	١٢٢
٧٢	٣٤٢	١٣٨	٦٤
١١٤	٩٩	١٠٥	١٧٩

(أ) المتوسط الحسابي (ج) المنوال

(ب) الوسيط (د) المدى

(٢) أي ممّا يأتي ليس من عوامل س٤ - س٦ س٢ - س٢٧؟

(أ) س٢ + س٣ (ج) س٣ + س٣

(ب) س٣ - س٣ (د) س٢ - س٣

(٣) لدى فاروق ٢٠ قصةً، ويريد أن يختار ٣ قصصٍ منها؛ ليأخذها معه في رحلة لبضعة أيام، فبكم طريقةٍ يمكنه أن يختار القصص إذا كان الترتيب غير مهمّ؟

(أ) ٦٠ (ج) ١١٤٠

(ب) ٨٤ (د) ١٤٨٢

إرشادات للاختبارات

السؤال ٣: بما أن الترتيب غير مهم، فإن المطلوب هو عدد التوافيق للقصص التي يمكن اختيارها.

(٤) ما معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين (١-، ٣-)، (٢-، ٣-)؟

(أ) ص = ٦ - س٩ (ج) ص = ٤ - س٥

(ب) ص = -١/٤ س + ٣ (د) ص = ٢/٣ س + ١

(٥) ترتفع قمة جبل حتى ٢٠٣٧ مترًا فوق سطح البحر. فإذا تحدد موقع شخص يسير على هذا الجبل. بالدالة م (ن) = ٥ - ٢ن + ٢٠٣٧، حيث ن عدد الدقائق، فأَيُّ ممّا يأتي يُعدُّ أفضل تفسير لميل الدالة؟

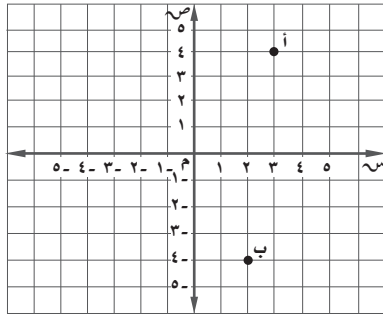
(أ) كان الموقع الابتدائي لهذا الشخص ٢٠٣٧ مترًا تحت مستوى سطح البحر.

(ب) كان الموقع الابتدائي لهذا الشخص ٢٠٣٧ مترًا فوق مستوى سطح البحر.

(ج) ينزل هذا الشخص بسرعة ٥، ٢ متر لكل دقيقة.

(د) يصعد هذا الشخص بسرعة ٥، ٢ متر لكل دقيقة.

(٦) أوجد المسافة بين النقطتين أ و ب مقربًا الحل إلى أقرب جزء من عشرة؟



(أ) ١، ٨ (ج) ٦، ٩

(ب) ٥، ٨ (د) ٢، ١٠

(٧) ثمن تذكرة دخول المتحف للأطفال ٨ ريالات، وللکبار ١٥ ريالاً. ما تكلفة دخول عائلة مكوّنة من ٤ أطفال ووالديهم؟

(أ) ٤٨ ريالاً (ج) ٧٦ ريالاً

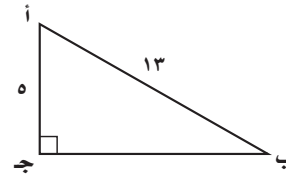
(ب) ٦٢ ريالاً (د) ٩٠ ريالاً



إجابة قصيرة

أجب عن الأسئلة الآتية:

٨) ما قيمة جاب في الشكل أدناه؟ اكتب إجابتك في صورة كسر اعتيادي.



٩) أوجد الانحراف المعياري لمجموعة البيانات الآتية، موضحاً خطوات الحل، ثم قرّب الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم ذلك.

٦	٩	١١	١٤
١٣	١٥	١٦	١٠
١٠	١٩	١٢	٩

١٠) مع لطيفة علبة فيها ٥ قطع بسكويت بطعم البندق و ٧ قطع بطعم الشوكولاتة و ٩ قطع بطعم جوز الهند و ٤ قطع بطعم الفراولة. إذا اختارت قطعتين من العلبة عشوائياً من دون إرجاع، فما احتمال أن تختار قطعة بطعم البندق، ثم قطعة بطعم الفراولة؟ اكتب الإجابة في صورة كسر اعتيادي.

١١) اكتب عبارة جبرية تمثل مساحة مثلث ارتفاعه ٤ جـ ٣ د ٢، وطول قاعدته ٣ جـ د ٤ بالوحدات المربعة.

١٢) سجّل عدنان ٨٤ هدفاً خلال موسم كرة السلة، وكان مجموع النقاط لهذه الأهداف ١٨٣ نقطة. إذا علمت أنه يمكن أن يكون للهدف نقطتان أو ثلاث نقاط، فما عدد الأهداف التي حصل فيها على ٣ نقاط، والأهداف التي حصل فيها على نقطتين في هذا الموسم؟

إجابة مطولة

أجب عن السؤال الآتي موضحاً خطوات الحل.

١٣) أراد مجلس بلدية أن يُعيد تنظيم أحد أحياء المدينة. فقرّر أعضاء المجلس أن يستطلعوا آراء سكان الحي. فاختار المجلس ٢٥٠ رب أسرة من سكان الحي عشوائياً، ثم سألهم عبر الهاتف عن رأيهم في مشروع إعادة التنظيم. وبناءً على نتائج الاستطلاع، توصل المجلس إلى استنتاج أن ٧١٪ من سكان الحي يؤيدون إعادة التنظيم.

أ) حدّد العينة.

ب) صنف المجتمع الذي اختيرت منه.

ج) هل طريقة جمع البيانات التي استعملها المجلس دراسة مسحية أم تجريبية أم دراسة قائمة على الملاحظة؟ اشرح إجابتك.

د) هل العينة متحيزة أم غير متحيزة؟ فسّر إجابتك.

هـ) إذا كانت العينة غير متحيزة فصنّفها إلى بسيطة أو طبقية أو منتظمة. وفسّر إجابتك.



أدرب

من خلال الإجابة عن الأسئلة؛ حتى أعزّز ما اكتسبته من مهارات، وأسعى إلى توظيفها في الحياة اليومية، وتوجيهها نحو اكتساب الخبرات وتوسيع المدارك، مما يزيد من فرص التعلم مدى الحياة.

أنا طالب معد للحياة، ومنافس عالمياً.

للمساعدة ..

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣
٢-١٠	مهارة سابقة	٤-١٠	مهارة سابقة	مهارة سابقة	٥-٩	مهارة سابقة	٧-٩	٣-١٠	٥-١٠	مهارة سابقة	مهارة سابقة	١-١٠

